

**KORIŠTENJE METODE KONAČNIH ELEMENATA PRI
ODREĐIVANJU PARAMETARA ELASTO-PLASTIČNE
MEHANIKE LOMA**

**USE OF FINITE ELEMENTS METHOD FOR DETERMINING
ELASTO-PLASTIC FRACTURE MECHANICS PARAMETERS**

Bahrudin Hrnjica, Fadil Islamović, Dženana Gačo
Univerzitet u Bihaću - Tehnički fakultet
dr. I. Ljubijankića bb, 77000 Bihać
Bosna i Hercegovina

Zijah Burzić
Vojno-tehnički institut Beograd
Ratka Resanovića 1, 11030 Beograd
Srbija

Ključne riječi: metoda konačnih elemenata, prslina, numerička analiza, konturni J integral, integral energijske domene, SENB epruveta, mehanika loma.

Keywords: finite elements method, crack, numerical analysis, contour J integral, energy domain integral, SENB specimen, fracture mechanics.

REZIME

U radu je prezentirana procedura numeričkog određivanja parametara mehanike loma pri elasto-plastičnim uvjetima oko vrha prsline. Primjenjujući na konkretan slučaj analiza je obuhvatila određivanje konturnog J integrala metodom integrala energijske domene. Pri analizi izrađen je numerički model SENB epruvete standardnih dimenzija, te izgrađena mreža konačnih elemenata. Mreža numeričkog modela oko vrha prsline definisana je sa singularnim konačnim elementima. Konturni J integral izračunavao se u 10 konturnih linija oko vrha prsline, a konačna vrijednost prikazana je kao aritmetička sredina. Vrijednosti J integrala izračunavane su shodno različitim vrijednostima opterećenja i dužine prsline. Iz dobijenih rezultata formirani su dijagrami ovisnosti J integrala o opterećenju, odnosno veličini prsline. Rezultati numeričke analize uspoređeni su sa eksperimentalnim rezultatima, te dati zaključci i smjernice.

ABSTRACT

The paper presents numerical procedure for determining fracture mechanics parameters in elastic-plastic conditions around the crack tip. Applied to this instance, the analysis included the determination of contour J integral by the energy domain integral method. Both, numerical model of standard dimensions SENB specimen and network of finite elements were created during the analysis. Numerical model network around the crack tip was defined by the singular finite elements. Contour J integral was calculated in 10 contour lines around the crack tip, and the final value was

shown as the arithmetic mean. J integral values were calculated according to different values of load and crack length. Diagrams of dependence of J integral to the load, i.e. the size of the crack, were formed from the obtained results. The results of numerical analysis were compared to experimental results and conclusions and guidelines are provided accordingly.

1. UVOD

Mehanika loma definiše veličine koje opisuju vezu između geometrije prsline nastale u konstrukciji sa vanjskim opterećenjem. Kritične vrijednosti opterećenja konstrukcije u pravilu su uvijek manje od statički određenih i propisanih. Nastajanje prsline i njen početni stabilni rast još uvijek ne ugrožava konstrukciju, ukoliko se adekvatno sprovede analiza i odrede parametri mehanike loma. Problem nastaje onda kada se stanje prsline u konstrukciji promjeni i kada prsline iz stabilnog prelazi u nestabilan rast pri kojem dolazi do loma. U tom pogledu mehanika loma, određivanjem kritičnih vrijednosti parametara mehanike loma, definiše ovu granicu, odnosno propisuje uvjete za sigurnu eksploataciju konstrukcije.

Parametri mehanike loma u pravilu se dobijaju eksperimentalnim putem, međutim takvi eksperimenti nisu toliko jeftini da bi se mogli izvoditi svakodnevno za svaki pojedinačni slučaj. Nastojanja da se eksperimentalna metoda u određenoj mjeri zamjeni numeričkim metodama predstavlja logičan pristup. Razvojem kompjuterske nauke, hardvera i softverskih rješenja danas je moguće simulirati gotovo sve prirodne procese. Zbog toga se u zadnjih nekoliko godina moduli za izračunavanje parametara mehanike loma, poput faktora intenziteta napona i J integrala, standardno nalaze u zadnjim verzijama Ansys, Abaqus i drugih popularnih softverskih paketa za numeričku analizu.

2. METODA KONAČNIH ELEMENATA

Metoda konačnih elemenata ili skraćeno MKE je numerička tehnika koja daje približna rješenja diferencijalnih jednačina koje opisuju neki problem iz fizike ili inženjstva. MKE svaki problemski domen, koji je neprekidan prostor, posmatra kao skup konačnih geometrijskih elemenata, prelazeći na taj način iz domenskog prostora u geometrijski.

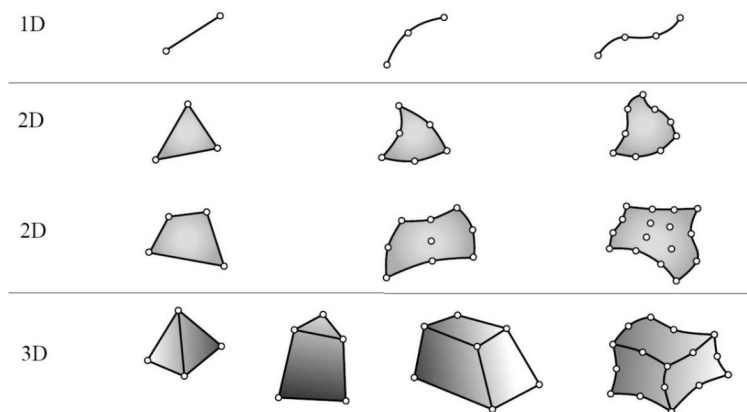
Konačni element koji predstavlja osnovni pojam metode može se predstaviti različitim geometrijskim likom (trougao, četvorougao i sl). Svaki konačni element sadrži nepoznate varijable (napon, deformacija, temperatura i sl.) koje se aproksimiraju poznatom funkcijom, a koje mogu biti linearne ili polinomske funkcije višeg reda [1].

Osnovne jednačine od kojih se polazi jesu jednačine za svaki konačni element koje se nakon rješavanja sumiraju preko cijelog domenskog problema. Ovakvo postavljanje problema vodi ka tome da se rješenje diferencijalne jednačine koja je često vrlo složena, svodi na rješavanje korištenjem tehnika iz linearne algebre [2].

Danas metodu konačnih elementata uvijek apliciramo pomoću kompjuterskih algoritama koji se razvijaju specifično za svaki domenski problem ili koristimo već gotove komercijalne softverske pakete, koji se onda proširuju sa razvijanjem posebnih algoritama u slučaju kada postojeća rješenja ne mogu zadovoljiti.

Konačni elementi koji se ovdje posmatraju imaju nekoliko osobina koje su vrlo važne u primjeni ove metode, s jedne strane zbog klasičnih zakona fizike, a s druge strane zbog primjenjivosti i korištenja adekvatnih matematičkih i numeričkih tehnika izračunavanja. Iz tog razloga pretpostavlja se da su konačni elementi međusobno povezani, te da se svakom elementu pridružuje funkcija pomjeranja.

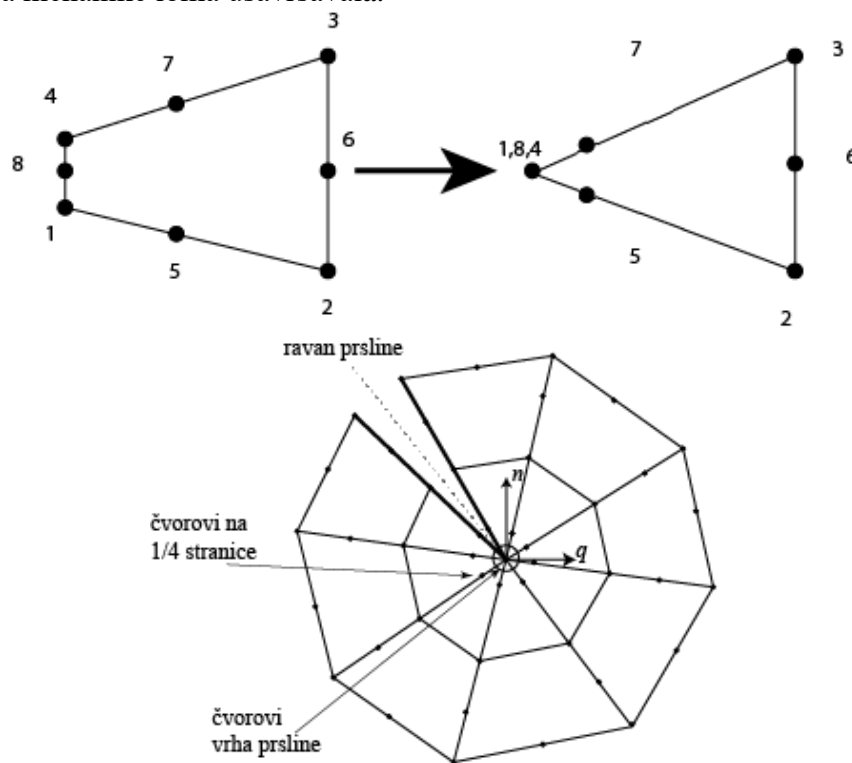
Primjeri različitih oblika konačnih elemenata prikazani su na slici 1.



Slika 1. Primjeri različitih oblika konačnih elemenata

MKE shodno problemu kojeg rješava, primjenjuje različite vrste konačnih elemenata. Ukoliko je u pitanju problem rešetkastih nosača, diskretizacija se sastoji u definisanju linijski konačnih elemenata ili štapova. Površinske strukture ploča raznih oblika se diskretizuju u jednostavna 2D geometrijska tijela poput trougla, pravougaonika, kvadrata, romba i sl. Dok se 3D problemi rješavaju korištenjem 3D konačnih elemenata kocke, prizme, i sl.

Jedan od problema primjene MKE u mehanici loma jeste diskretizacija tijela oko vrha prsline, jer sami vrh prsline predstavlja singularnu tačku za napon. Iz tog razloga moguće je koristiti posebne konačne elemente za primjenu numeričke analize u mehanici loma, a koja se tokom razvoja mehanike loma usavršavala.



Slika 2. Transformacija četverougaonog konačnog elementa u singularni

U upotrebi se danas najviše koristi tzv. singularni konačni element koji okružuje vrh prsline u obliku trougla, a postavljaju slično kao na slici 2. Singularni konačni elementi polaznu osnovu imaju u standardnom obliku koji se transformiraju u singularne.

Na slici 2. pokazano je kako se četverougaoi konačni element transformiše u singularni. Njegovi među-čvorovi koji se nalaze na sredinama stranica, pomjeraju se na ¼ dužine.

3. NUMERIČKO ODREĐIVANJE J INTEGRALA

Numeričko određivanje parametara mehanike loma razvijano je zadnjih 40 godina, pri čemu je nastalo desetak metoda. Generalno, sve metode se mogu podijeliti na metode podudaranja tačke i enegijske metode. Prve metode određuju faktor intenziteta napona preko napona i deformacija u tijelu, dok druge određuju energiju deformisanja koja je korištena za izračunavanje faktora intenziteta napona.

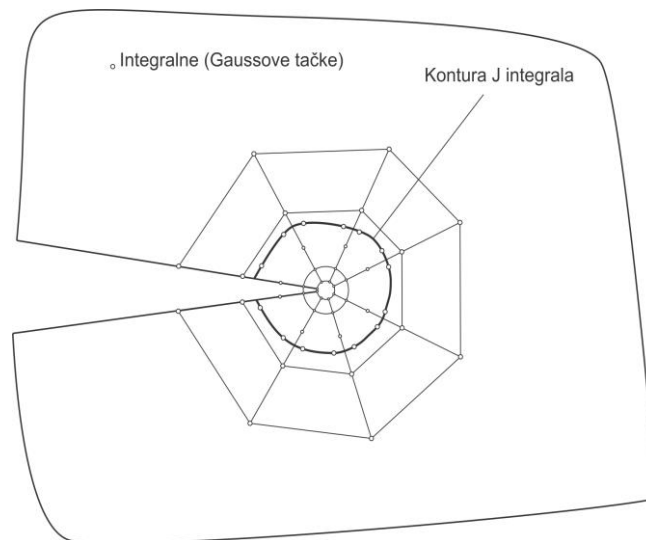
Prednost enegijskih metoda je u tome što se mogu primjenjivati i na nelinearna područja, dok su mane istih nemogućnost odvajanja energije deformisanja prema modelima odvajanja prsline. Sve današnje moderne numeričke metode za određivanje parametara mehanike loma baziraju se na metodi integrala enegijske domene [3].

Zbog činjenice da današnji softveri za analizu naponskog stanja izračunavaju naponsko deformaciono stanje u integralnim, odnosno Gausovim tačkama, numeričko izračunavanje J integrala bazira se na ovim tačkama. Iz tog razloga konturu oko vrha prsline posmatramo u integralnim, a ne u čvorovima konačnih elemenata [4].

Napišimo opšti oblik J integrala:

$$J = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \int_{\Gamma} \left(W_s dy - T_i \frac{du_i}{dx} d\Gamma \right), \quad \dots (1)$$

gdje je: T_i - vektor napona,
 u_i - vektor pomjeranja,
 W - energija deformisanja,
 $d\Gamma$ - dužina luka konture.



Slika 3. Zatvorena oblast oko vrha prsline

Definisanjem svake komponente J integrala prikazanog izrazom (1) možemo dobiti pogodan analitički izraz za J integral koji se može numerički izračunati. Energiju deformisanja možemo pisati kao:

$$W_s = \frac{1}{2} \left[\sigma_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right]. \quad \dots (2)$$

Priraštaj y ose možemo pisati kao:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta. \quad \dots (3)$$

Vektor naprezanja T i priraštaj pomaka dobijemo kao skalarni proizvod:

$$T_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x} = \left[(\sigma_{xx} n_1 + \sigma_{xy} n_2) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\sigma_{xy} n_1 + \sigma_{yy} n_2) \frac{\partial u_y}{\partial y} \right]. \quad \dots (4)$$

Diferencijal konture izračunavamo kao:

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2} d\eta, \quad \dots (5)$$

za $d\xi = \text{const.}$

Uvrštavajući (2), (3), (4) i (5) u (1) imamo:

$$J = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sigma_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \right\} - \int_{\Gamma} \left\{ \left[(\sigma_{xx} n_1 + \sigma_{xy} n_2) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\sigma_{xy} n_1 + \sigma_{yy} n_2) \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] \sqrt{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2} d\eta \right\} \quad \dots (6)$$

Kontura preko koje se vrši integracija izabrana je tako da odgovara elementima matrice krutosti. Iz tog razloga kontura mora prolaziti Gausovim integracijskim tačkama. Svi izrazi jednačine (6) su poznati i mogu se direktno dobiti preko standardnih programa za numeričku analizu.

Evaluacija izraza (6) vrši se preko integracijskih tačaka duž konture (slika 3.) pa dobijamo diskretni oblik izraza (1):

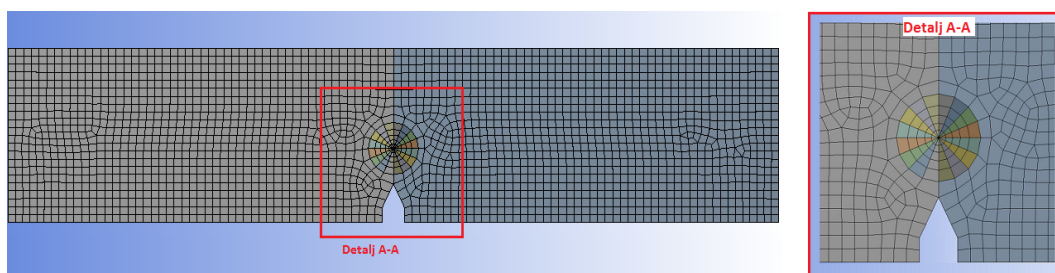
$$J = \sum_{g=1}^{ng} W_g I_g(\xi_g, \eta_g), \quad \dots (7)$$

gdje je: W_g – Gaussov težinski faktor,
 ng – broj integracijskih tačaka,
 I_g – integrand koji se izračunava za svaku integracijsku tačku g

$$I_g = \frac{1}{2} \left[\sigma_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{xx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] \frac{\partial y}{\partial \eta} - \left[(\sigma_{xx} n_1 + \sigma_{xy} n_2) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\sigma_{xy} n_1 + \sigma_{yy} n_2) \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] \sqrt{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2} . \quad \dots (8)$$

4. REZULTATI NUMERIČKOG ODREĐIVANJA J INTEGRALA

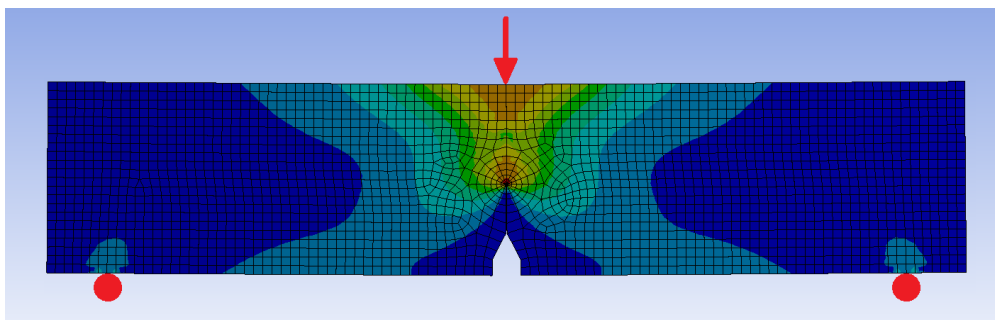
U ovom radu izvršeno je numeričko određivanje J integrala za SENB epruvetu sa početnom zamornom prslinom dužine a_0 . SENB epruveta geometrijski je obrađena shodno standardu ASTM 1820. Na osnovu geometrijskih karakteristika izvršeno je modeliranje epruvete, te izrađena mreža konačnih elemenata. Kako je ranije naglašeno oko vrha prsline izvršena je mreža konačnih elemenata definisana prethodno preko singularnih konačnih elemenata [5].



Slika 4. 2D model SENB epruvete sa generiranom mrežom konačnih elemenata [5]

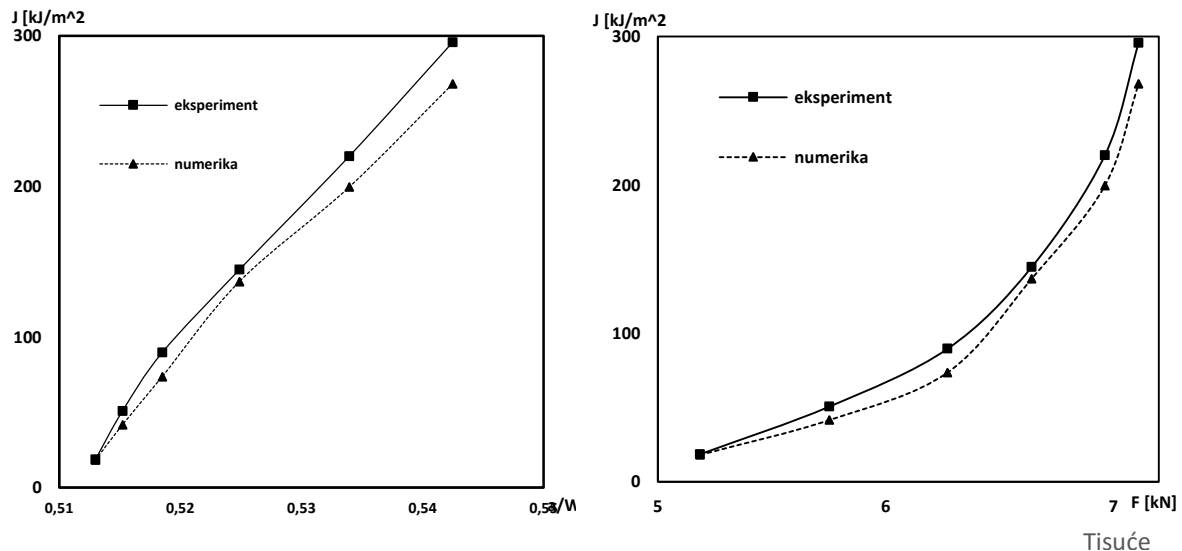
Slika 4. prikazuje model SENB epruvete sa generiranom mrežom. Kako se može vidjeti epruveta je modelirana kao 2D model, a mreža konačnih elemenata izgrađena je od četverouglih, odnosno kvadrilateralnih konačnih elementa koji sadržavaju osam čvorova. Četiri čvora se nalaze na tjemenu četvorougla, dok se ostala četiri čvora nalaze na srediinama stranica (vidi sliku 2).

Singularnim konačnim elementima postiže se veća preciznost, a interpolacijske funkcije mogu bolje opisati promjenu napona i drugih veličina kroz čvorove konačnog elementa. Kada je riječ o samom vrhu prsline, četverouglaoni elementi se degeneriraju u trouglaste (slika 2). Čvorovi koji se nalaze na sredini stranica koje se spajaju u vrhu prsline, pomjeraju se za $\frac{1}{4}$ pri linearno-elastičnoj, a $\frac{1}{2}$ pri elasto-plastičnoj mehanici loma. Ovim se definiše stepen singularnosti koji iznosi $1/\sqrt{r}$ pri linearno-elastičnoj, a $1/r$ pri elasto-plastičnoj analizi. Prethodno provedeno pre-procesuiranje podrazumijevalo je i variranje veličine prsline u određenom intervalu, shodno eksperimentalnim rezultatima dužine prsline i korespondentnog opterećenja.



Slika 5. Numerički određeni J integral za SENB epruvetu izvađenu iz OM [5]

Kako se može vidjeti sa slike 5, prije numeričkog određivanja J integrala, izvršena je numerička analiza napona i deformacija. Kako je prethodno pokazano J integral predstavlja integral po konturi oko vrha prsline čije tačke prolaze kroz integralne, a ne tačke čvorova konačnih elemenata. Numeričko određivanje J integrala izvršeno je na osnovu eksperimentalnog određivanja J integrala na način da su simulirani ulazni podaci, opterećenja, dužine prsline i mehaničke osobine materijala.



Slika 6. Komparacija eksperimentalnih i numeričkih rezultata J integrala [5]

Prikazana slika 6. prikazuje komparaciju rezultata, iz koje se vidi da su rezultati numerike poprimili manje vrijednosti u odnosu na eksperimentalne rezultate. Razlog tome leži u činjenici da se plastično područje ipak nije moglo dovoljno idealizirati bilinearnim i multilinearom koeficijentom očvršćavanja koje se koristilo pri numeričkoj analizi [5].

5. ZAKLJUČAK

Ovaj rad predstavlja korištenje numeričke analize u određivanju parametara mehanike loma, prvenstveno pri određivanju J integrala. Eksperimentalni pristup u određivanju parametara mehanike loma predstavlja osnovnu, preciznu i najsigurniju metodu, koja zbog same kompleksnosti provođenja i troškova izvođenja eksperimenta u određenim slučajevima predstavlja vrlo zahtjevan proces. Određivanje parametara mehanike loma numeričkom analizom predstavlja solidnu alternativu, te ju je moguće koristiti u kombinaciji sa eksperimentalnom metodom. Koliki je značaj numeričkog određivanja parametara mehanike loma pokazuje i činjenica da današnji najpoznatiji softveri za numeričku analizu poput Ansys, Abaqus i dr. posjeduju module za numeričko određivanje parametara mehanike loma: J Integrala, faktora intenziteta napona, energije deformisanja, kao i ostale značajke mehanike loma.

6. REFERENCE

- [1] N. Zaimović-Uzunović, S. Lemeš: Metod konačnih elemenata, Dom štampe, Zenica, 2002.
- [2] E. Brkanov: Introduction to the Finite Element Method, Tehnical University Riga, Riga, 2001.
- [3] T.L. Anderson: Fracture Mechanics Fundamentals and Application Third Edition, Taylor & Francis, New York, 2005.
- [4] S. Mohammadi: Blackwell Publishing Ltd, Extended Finite Element Method, Teheran, 2008.
- [5] B. Hrnjica: "Numeričko-evolucijski pristup određivanja parametara mehanike loma posuda pod pritiskom", Doktorska disertacija, Univerzitet u Bihaću – Tehnički fakultet Bihać, 2014.