3rd International Scientific Conference on Engineering
”Manufacturing and Advanced Technologies”
MAT 2014, Mostar Bosnia and Herzegovina,18-20September 2014

STOHASTIČKO I GENETSKO MODELIRANJE KRITIČNOG PRITISKA POSUDA OD KOMPOZITNIH MATERIJALA

Fadil Islamović
Dženana Gačo
Esad Bajramović
University in Bihać
Faculty of Technical Engineering
dr. Irfana Ljubijankića bb
77000 Bihać
Bosnia and Herzegovina

Mirzet Beganović
Regeneracija d.o.o. Velika Kladuša
Bosnia and Herzegovina

Mersida Manjgo
University “Džemal Bijedić” in Mostar
Faculty of Mechanical Engineering
Bosnia and Herzegovina

ABSTRACT
Ovaj rad daće uporedni prikaz rezultata dobijenih stohastičkim i genetskim modeliranjem kritičnog pritiska, odnosno prikazaće mogućnosti provjere pouzdanosti korištenja matematičkih modela bez izvodjenja skupocijenih eksperimentalnih istraživanja. Za stohastičko modeliranje će se koristiti ulazni parametri eksperimenta (prečnik posude, debljina stijenke posude, zatezna čvrstoća materijala posude) i dobijeni rezultati kritičnog pritiska realno izvedenog eksperimenta hidroprobama na posudama izrađenim od kompozitnih materijala. Za genetsko modeliranje korišten je softwer „GPdotNET“, u koji su uvršteni ulazno-izlazni podaci izvedenog eksperimenta.
Na kraju rada biće prikazana uporedna analiza rezultata dobijenih eksperimentom, stohastičko matematičkim i genetskim modeliranjem, te odgovarajući zaključci analize.
Keywords: stohastičko modelireanje, genetsko modeliranje, posuda pod pritiskom, kritični pritisak, kompozitni materijal.

1. UVOD
Eksperimentalna istraživanja služe za provjeru, korekciju i verifikaciju numeričkih rezultata, te za stohastičko matematičko modeliranje koje najrealnije opisuje obradne procese i sisteme. Tehnološko oblikovanje i projektiranje modernih procesa obrade zahtijeva analizu svih tehničko-tehnoloških parametara procesa i primjene znanstvenih metoda u cilju modeliranja i definiranja optimalnih uvjeta obradnih procesa i sistema [1].
U ovom radu na osnovu ulaznih parametara i eksperimentalnih rezultata potrebno je doći do matematičkog modela za kritični pritisak, tj. da mjenajući ulazne parametre znamo do kojeg konačnog pritiska posuda može podnijeti opterećenje. Da bi se mogao izvesti eksperiment potrebno ga je prije toga ograničiti, tj. treba izdvojiti nekoliko uticajnih faktora iz velikog broja istih, kao i izlaznu veličinu koju želimo mjeriti. Pošto je u ovom radu zadatak dobiti matematički model za kritični pritisak, u tabeli 1.1. mogu se vidjeti parametri koji su izabrani da će uticati na ovaj proces (prečnik posude - D, debljina stijenke posude - s, zatezna čvrstoća materijala posude - σ_M). Osnovni faktori su odabrani tako da njihove promjene nisu funkcije spoljnih faktora, niti su u međusobnoj vezi i relativno je moguće obaviti njihovo mjerenje u procesu.

Tabela 1.1. Uticajni faktori eksperimenta [2]

Nivo eksperimenta Položaj faktora	Uticajni faktori		
	D [mm]	s [mm]	σ_M [N/mm^2]
Minimalni	400	3,2	118
Maksimalni	800	6,4	169

Ovi uticajni faktori kao nezavisno promjenjive veličine, koji se u toku izvođenja eksperimenta variraju prema unaprijed utvrđenim granicama i planu eksperimenta, nazivaju se osnovni faktori. Ostali uticajni faktori, čiji se uticaj zanemaruje ili zadržava nepromjenjen u toku izvođenja eksperimenta, nazivaju se spoljni faktori [1].

2. IZRADA STOHASTIČKOG MATEMATIČKOG MODELA

Varijable ulaznih parametara izvedenog eksperimenta (prečnik posude - D, debljina stijenke posude - s, zatezna čvrstoća materijala posude - σ_M) i eksperimentalno dobijene vrijednosti kritičnog pritiska- p_{kr} posuda date su u slijedećoj tabeli.

Tabela 2.1. Varijable i rezulatati eksperimenta [2]

N	Fizikalne varijable			Eksperimentalni rezultati
	X_1 D [mm]	X_2 s [mm]	X_3 σ_M [N/mm^2]	P_{kr} [bar]
1	400	3,2	118	22,0
2	800	3,2	118	9,0
3	400	6,4	118	30,0
4	800	6,4	118	17,0
5	400	3,2	169	26,5
6	800	3,2	169	12,5
7	400	6,4	169	35,0
8	800	6,4	169	20,5

Za izbor tipa matematičkog modela ne postoji opće važeće pravilo, a to znači da za svaki istraživani proces ili sistem treba izabrati model i izvršiti provjeru njegove tačnosti i adekvatnosti u odnosu na realni proces. U ovom eksperimentu imamo tri nezavisno promjenjive veličine, te imamo tri varijabilna faktora tj. k=3, a varijacija faktora je na dva nivoa r = 2 (min i max), što znači da ima karakter trofaktornog plana eksperimenta gdje je potreban broj mjerenja:

$$N = r^k = 2^3 = 8 \tag{1}$$

gdje je:
r - broj nivoa osnovnih faktora (r = 2, min i max)
k - broj variranih osnovnih faktora (k = 3)
N = r ^{k} – broj ponavljanja eksperimenta sa variranjem faktora (N=8)

Početni matematički model je trofaktorni polinom prvog reda:

$$\mathrm{Y} = \mathrm{b}_0 + \mathrm{b}_1\mathrm{X}_1 + \mathrm{b}_2\mathrm{X}_2 + \mathrm{b}_3\mathrm{X}_3 \tag{2}$$

Tabela 2.2. Matrica plana eksperimenta [2]

	X_0	X_1	X_2	X_3	y_j
1	1	-1	-1	-1	22,0
2	1	1	-1	-1	9,0
3	1	-1	1	-1	30,0
4	1	1	1	-1	17,0
5	1	-1	-1	1	26,5
6	1	1	-1	1	12,5
7	1	-1	1	1	35,0
8	1	1	1	1	20,5

Odnosno koeficijenti matematičkog modela biće:

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_{0j} y_j \,, \qquad \text{za} \quad i = 1, 2, ..., k \,, \quad \text{i} \tag{3}$$

$$b_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_{ij} y_j \ , \qquad\qquad 1 \le i < m \le k \tag{4}$$

gdje su:

X_{ij} - vrijednost X_i u j-tom eksperimentu

y_j - mjerena veličina u j-tom eksperimentu

N - broj eksperimenata

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= \tfrac{1}{8}\left(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8\right) \\ b_1 &= \tfrac{1}{8}\left(-y_1+y_2-y_3+y_4-y_5+y_6-y_7+y_8\right) \\ b_2 &= \tfrac{1}{8}\left(-y_1-y_2+y_3+y_4-y_5-y_6+y_7+y_8\right) \\ b_3 &= \tfrac{1}{8}\left(-y_1-y_2-y_3-y_4+y_5+y_6+y_7+y_8\right) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Vrijednosti koeficijenata modela date su u slijedećoj tabeli.

Tabela 2.3. Koeficijenti modela [2]

b_0	21,5625
b_1	-6,8125
b_2	4,0625
b_3	2,0625

Uvrštavanjem koeficijenata modela iz prethodne tabele u obrazac (2) dobijamo matematički izraz:

$$Y = 21{,}56 - 6{,}81X_1 + 4{,}06X_2 + 2{,}06X_3 \tag{6}$$

Za ocjenu adekvatnosti modela, odnosno za ispitivanje veze između zavisno promjenjivih y_j i nezavisno promjenjivih veličina X_i koristi se koeficijent višestruke regresije.

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{j=1}^{N}\left(y_j^E - y_j^R\right)^2}{\sum_{j=1}^{N}\left(y_j^E - \bar{y}^E\right)^2}} \tag{7}$$

gdje su:

y_j^E - vrijednosti eksperimentalnih rezultata

y_j^R - izračunate vrijednosti iz dobivenog modela

$\bar{y}^E = \frac{\sum_{j=1}^{N} y_j^E}{N}$ - artimetička sredina svih eksperimentalnih rezultata

Vrijednosti koeficijenata višestruke regresije se nalaze u granicama $0 \le R \le 1$. Kada je vrijednost koeficijenta R=1, model potpuno opisuje rezultate eksperimenta. Vrijednost R=0 pokazuje da između varijabli y_j i X_i ne postoji nikakva međusobna zavisnost [1].

Tabela 2.4. Izračunavanje komponenata višestruke regresije [2]

R/b	y_j^E	y_j^R	$\left(y_j^E - y_j^R\right)^2$	$\left(y_j^E - \bar{y}^E\right)^2$
1	22,0	22,3	0,063	0,19
2	9,0	8,6	0,141	157,75
3	30,0	30,4	0,141	71,23
4	17,0	16,8	0,063	20,79
5	26,5	26,4	0,016	24,40
6	12,5	12,8	0,063	82,08
7	35,0	34,5	0,250	180,63
8	20,5	20,9	0,141	1,12
	$\bar{y}^E$=21,5		Σ= 0,875	Σ=538,22

Uvrštavanjem izračunatih vrijednosti u izraz (7) dobijamo da je koeficijent višestruke regresije:

$$R = 0{,}998$$

Dobijena vrijednost višestruke regresije (R = 0,998) ukazuje na to da stohastički matematički model (6) adekvatno opisuje navedeni proces, odnosno sa 99,8 % [2].

Dekodiranje:

$$X_1 = \frac{D - \frac{D_{\max} + D_{\min}}{2}}{\frac{D_{\max} - D_{\min}}{2}} = \frac{D - \frac{800+400}{2}}{\frac{800-400}{2}} = \frac{D-600}{200} \tag{8}$$

$$X_1 = (0{,}005D - 3)$$

$$X_2 = \frac{s - \frac{s_{\max} + s_{\min}}{2}}{\frac{s_{\max} - s_{\min}}{2}} = \frac{s - \frac{6{,}4+3{,}2}{2}}{\frac{6{,}4-3{,}2}{2}} = \frac{s-4{,}8}{1{,}6} \tag{9}$$

$$X_2 = (0{,}625s - 3)$$

$$X_3 = \frac{\sigma_M - \frac{\sigma_{M\max} + \sigma_{M\min}}{2}}{\frac{\sigma_{M\max} - \sigma_{M\min}}{2}} = \frac{\sigma_M - \frac{169+118}{2}}{\frac{169-118}{2}} = \frac{\sigma_M - 143{,}5}{25{,}2} \tag{10}$$

$$X_3 = \left(0{,}0396\sigma_M - 5{,}694\right)$$

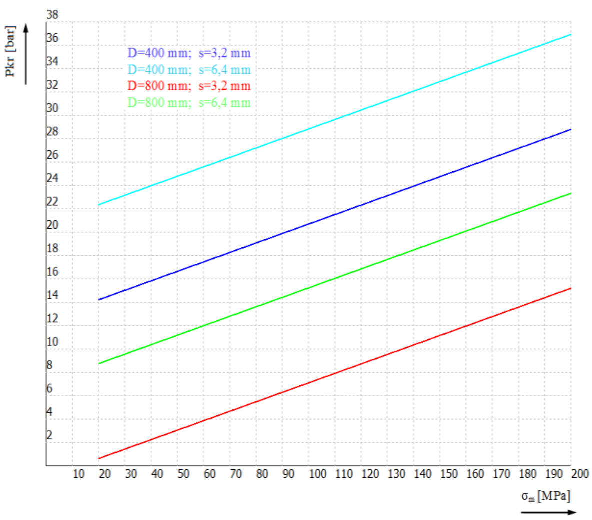
Uvrštavanjem dekodiranih vrijednosti u izraz (6) dolazimo do konačnog oblika matematičkog modela:

$$P_{kr} = 21{,}56 - 6{,}81(0{,}005D-3) + 4{,}06(0{,}625s-3) + 2{,}06(0{,}0396\sigma_M - 5{,}694) \tag{11}$$

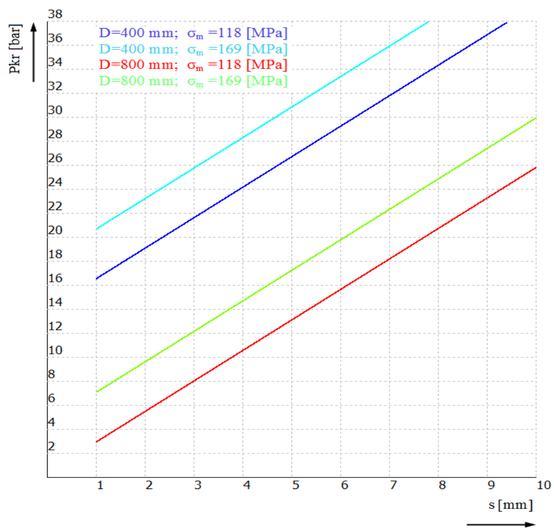
Odnosno:

$$P_{kr} = 18{,}06 - 0{,}034D + 2{,}54s + 0{,}081\sigma_M \tag{12}$$

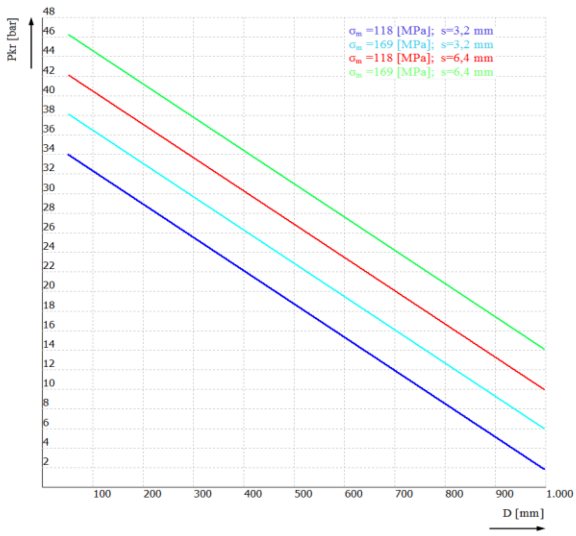
Zavisnost kritičnog pritiska posude (p_{kr}) od ulaznih parametara (zatezna čvrstoća materijala posude - σ_M, debljina stijenke posude - s, prečnik posude - D) možemo prikazati i dijagramski kao što je dato na slijedećim slikama: slika 2.1. prikazuje funkcionalnu zavisnost kritičnog pritiska i zatezne čvrstoće materijala sa konstantnim vrijednostima prečnika i debljine stijenke posude; slika 2.2. prikazuje zavisnost kritičnog pritiska i debljine stijenke uz konstante vrijednosti zatezne čvrstoće materijala i prečnika posude; a slika 2.3. prikazuje zavisnost kritičnog pritiska i prečnika posude uz konstantne vrijednosti čvrstoće materijala i debljine stijenke posude [2].



Slika 2.1. Zavisnost kritičnog pritiska i zatezne čvrstoće materijala [2]



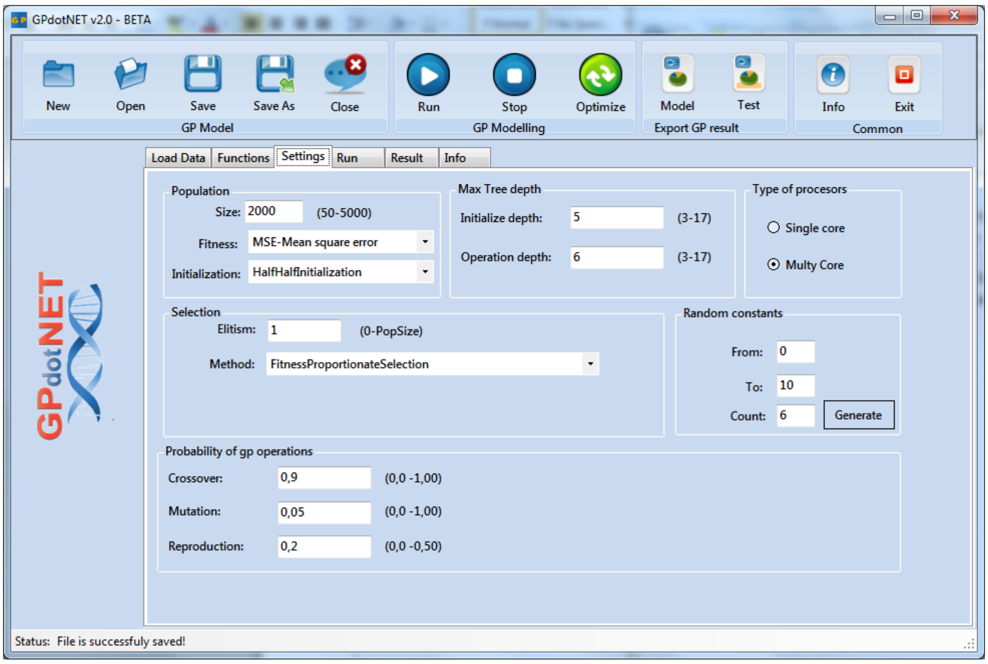
Slika 2.2. Zavisnost kritičnog pritiska i debljine stijenke posude [2]



Slika 2.3. Zavisnost kritičnog pritiska i prečnika posude [2]

3. GENETSKO MODELIRANJE

Genetsko modeliranje, odnosno genetski algoritmi, se temelji na Darwinovom principu reprodukcije i prirodnog odabira vrste. Prema tome evolucijski algoritmi koriste operacije poput ukrštanja, mutacije i selekcije. U planu izrade ovog rada radi kontrole dobijenog matematičko-stohastičkog modela izvršeno je i modeliranje pomoću genetske metode. Za dobijanje genetskog modela ulazno-izlazni podaci eksperimenta uvršteni su u softwer za genetsko modeliranje „GPdotNET" [3].



Slika 3.1. Dijaloški okvir programa GPdotNET [3]

Konstante za matematički model:
R4= 7,4708
R6= 6,2532

Matematički model prema genetskom modeliranju u konačnici se može napisati u obliku:

$$\begin{aligned}
Pkr_{gen} = &\left(\ln(X_3 - X_2 - R_4 - R_4 R_4 - \ln(X_3)) \ln\left(X_2 X_2 \left(2X_2 + \frac{X_3}{X_1} \right) \right) \right) \\
&- \left(\sin(\sin(X_1)) \left(\sin((X_3 + X_1)(R_6 - X_2)) + \left(\sin(\sin(X_2)) + (\ln(X_3)\ln(R_6)) \right) \right) \right) \qquad (13)
\end{aligned}$$

4. REZULTATI MATEMATIČKOG MODELIRANJA

U tabeli 4.1. prikazani su usporedni rezultati eksperimenta i rezultati dobijeni prema stohastičkom matematičkom modeliranju, kao i prema genetskom modeliranju.

Tabela 4.1. Rezultati kritičnog pritiska eksperimenta i matematičkih modela [2]

	Fizikalne varijable			Eksperimentalni rezultati	Rezultati prema matematičkom modelu	
					Stohastički model	Genetski model
N	X_1 D [mm]	X_2 s [mm]	X_3 σ_M [N/mm^2]	P_{krexp} [bar]	P_{krmat} [bar]	P_{krgen} [bar]
1	400	3,2	118	22,0	22,1	22,0
2	800	3,2	118	9,0	8,5	9,0
3	400	6,4	118	30,0	30,3	29,9
4	800	6,4	118	17,0	16,7	17,1
5	400	3,2	169	26,5	26,3	26,5
6	800	3,2	169	12,5	12,7	12,6
7	400	6,4	169	35,0	34,4	35,0
8	800	6,4	169	20,5	20,8	20,5

Na osnovu tabele 4.1. može se zaključiti da se rezultati dobijeni stohastičko matematičkim modelom i genetskim modelom skoro i ne razlikuju što dodatno potvrđuje adekvatnost modela prema (12).

5. ZAKLJUČAK

Iz usporedbe dobijenih rezultata se vidi da se eksperimentalni rezultati zanemarivo malo razlikuju u odnosu na rezultate dobijene matematičkim modeliranjem, što ukazuje na to da se dobijeni matematički model može bez velikih odstupanja koristiti u praksi, odnosno da projektanti i tehnolozi proizvodnje za određeni kompozitni materijal, prečnik posude i debljinu stijenke, mogu izračunati pri kojem kritičnom pritisku će doći do otkaza posude. Matematički model kritičnog pritiska je dobar pokazatelj projektantima da znaju do kojeg kritičnog pritiska može izdržati navedena posuda, te na osnovu toga mogu napraviti blic kontrolu radnog, odnosno projektovanog, pritiska [2].

Rezultati dobijeni eksperimentom i matematičkim modeliranjem potvrđuju postavljenu hipotezu da se kritični pritisak posuda od kompozitnih materijala može dovesti u vezu sa mehaničkim karakteristikama materijala (σ_M), prečnikom (D) i debljinom stijenke posude (s), tj. da je:

$$p_{kr} = f(\sigma_M, D, s, ...) \quad \text{odnosno} \quad P_{kr} = 18{,}06 - 0{,}034D + 2{,}54s + 0{,}081\sigma_M$$

tako da se dobijeni matematički model može kvalitetno koristiti u definisanju kritičnog pritiska.

Prikazani matematički model za testirane posude pod pritiskom daje rezultate sa odstupanjem ±0,5 bara u odnosu na rezultate eksperimenta, tako da se sa vrlo dobrom tačnošću može reći na kojem pritisku će doći do totalnog oštećenja posude, tj. do otkaza ili pucanja posude [2].

6. REFERENCES

[1] *M. Jurković, "Matematičko modeliranje inženjeskih procesa i sistema", Univerzitet u Bihaću - Mašinski fakultet Bihać, Bihać, 1999.*

[2] *M. Beganović, "Teorijsko-eksperimentalna analiza i matematičko modeliranje kritičnog pritiska posude od kompozitnih materijala", Magistarski rad, Univerzitet u Bihaću - Tehnički fakultet Bihać, 2013.*

[3] *www.gpdot.net, genetsko modeliranje.*