

MODELIRANJE J INTEGRALA KORIŠTENJEM UMJETNIH NEURONSKIH MREŽA

Bahrudin Hrnjica, Fadil Islamović, Zijah Burzić, Dženana Gačo,
Univerzitet u Bihaću - Tehnički fakultet Bihać, Irfana Ljubijankića bb, bhrnjica@outlook.com
Univerzitet u Bihaću - Tehnički fakultet Bihać, Irfana Ljubijankića bb, f.islam@bih.net.ba
Vojno-tehnički institut, R.Resanovića 1,11000 Beograd, zijah_burzic@vektor.net
Univerzitet u Bihaću - Tehnički fakultet Bihać, Irfana Ljubijankića bb, dzgaco@bih.net.ba

Ključne riječi: J Integral, Elasto-Plastična Mehanika Loma, Umjetne Neuronske Mreže, GPdotNET, Povratna Propagacija

SAŽETAK:

J integral predstavlja jedan od najvažnijih parametara elasto-plastične mehanike loma. Definiše se kao jedan od načina izračunavanja promjene energije deformisanja (en. strain energy release rate), odnosno rada po jedinici lomne površine. U ovom radu izvršeno je eksperimentalno istraživanje u području mehanike loma, pri čemu su se određivali parametri elasto-plastične mehanike loma. Nakon dobijanja eksperimentalnih rezultata izvršeno je matematičko modeliranje J integrala primjenom umjetnih neuronskih mreža pri čemu se koristila tzv. povratna propagacija greške (en. Back-propagation error) kao algoritam učenja neuronske mreže. Pri modeliranju ovom metodom korišten je GPdotNET kompjuterski program razvijen od strane autora rada. U radu su prikazani rezultati modeliranja koji pokazuju da dobijeni matematički modeli bazirani na umjetnim neuronskim mrežama pokazuju visoku korelaciju sa eksperimentalnim rezultatima. U radu je, također, pokazano da dobijeni modeli dobro predviđaju vrijednosti J integrala. Naime, pri eksperimentalnom istraživanju izvršen je dodatni eksperiment, a dobijeni rezultati uspoređeni sa rezultatima modela. U radu je pokazano da su dobijeni rezultati dodatnog eksperimenta vrlo bliski vrijednostima koje dobijeni matematički model vraća za iste vrijednosti ulaznih parametara.

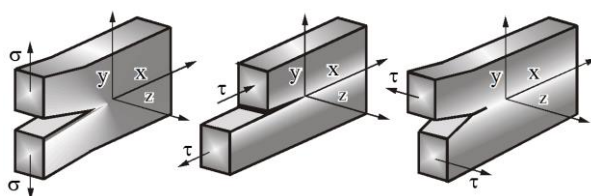
1. UVOD

Kada se u okolini prsline pojave naponi čije vrijednosti prelaze granicu napona tečenja, dolazi do širenja prsline i nastanka novih diskontinuiteta. Ovakvo ponašanje materijala karakteristično je za konstrukcione materijale pa se posebna pažnja posvećuje na prisustvo prsline u konstrukcijama izraženim od ovakog materijala. Definisati naponsko stanje oko vrha prsline složen je proces, jer napon kao fizička veličina nije definisan u funkciji geometrijskih veličina prsline. Zbog toga je potrebno definisati nove veličine koje će, pored statičkih veličina napona i deformacija u materijalu, u svojoj funkciji imati i geometrijske osobine prsline. Kada se na klasičan način pokuša analizirati napon oko vrha prsline, uočavamo da se eksponencijalno povećava kako se približavamo vrhu prsline. Lahko možemo uočiti da vrh prsline predstavlja singularnu naponska tačku. Drugim riječima, veličina napona u vrhu prsline teži ka beskonačno. Kako ne postoji materijal koji može podnijeti beskonačnu veličinu napona, vrh prsline se plastificira, dok veličina plastične zone oko prsline prvenstveno zavisi od mehaničkih svojstava materijala[1].

Istraživanja provedena zadnjih pedeset godina većim dijelom imala su za cilj da potvrde osnovne koncepte mehanike loma, odnosno da se teorijska saznanja upotrijebe pri dizajniranju konstrukcija

koja bi imala što kvalitetniji otpor prema širenju prslina. Razvoj mehanike loma temeljio se na teorijsko - eksperimentalnim principima, jer su negativna iskustva na avionima i brodovima sredinom prošlog vijeka, većim dijelom za posljedicu imala nedostatak poznavanja razvoja prslina u konstrukciji. Od 1948. godine male plastične korekcije vršene su oko vrha prslina, dok su se još uvijek koristili principi linearno elastične mehanike loma. Prije 1960. godine principi mehanike loma primjenjivali su se samo na materijale koji se deformišu po Hookovom zakonu. Nakon 1960. godine počinju se posmatrati i nelinearni materijali koji dovode do upotrebe elasto-plastične mehanike loma, kao dodatka na prethodnu teoriju[2].

Prslina u tijelu se može opteretiti tako da postoje tri načina njenog otvaranja. Mehaničke osobine kod ovakvog tijela moguće je opisati faktorom intenziteta napona K koji se razlikuje zavisno od spomenutih načina otvaranja prslina, odnosno definišu se tri vrste faktora intenziteta napona i to K_I , K_{II} , K_{III} . Slika 1 prikazuje tri osnovna modela otvaranja prslina, tj. cijepanje, klizanje i smicanje respektivno.



Slika 1: Oblici razvoja prslina

Fundamentalni koncept linearno-elastične mehanike, LEML leži u činjenici da se naponsko polje oko vrha prslina može opisati jednim parametrom, K_I koji predstavlja faktor intenziteta napona. Ovaj parametar u direktnoj je vezi sa intenzitetom napona σ , odnosno veličinom prslina a . Moguće ga je posmatrati i kao osnovnu jedinicu mehanike loma, analogno sa jedinicom napona u otpornosti materijala [3]. Faktor intenziteta napona K_I , možemo dovesti u funkcionalnu vezi sa naponom σ , i veličinom prslina a , za različite oblike i položaj otvaranja prslina na ploči, shodno slici 1.

Analogno kao i u slučaju LEML, moguće je definisati nelinearnu energiju deformisanja J koja se oslobađa pri opterećenju ravne ploče. Na identičan način kao i u slučaju energije deformisanja G kod LEML, nelinearna energija deformisanja J se može iskoristiti kao kriterij loma, na način da za određeni materijal pri kritičnoj vrijednosti J_c dolazi do nestabilnog rasta prslina[5].

2. UMJETNE NEURONSKE MREŽE

Sredinom prošlog, stoljeća uporedo sa počecima razvoja kompjuterske nauke, pojavljuje čitav niz istraživanja koji primjenjuju dotad nekoristene alternativne načine u rješavanju inženjerskih problema. Sva istraživanja nastoje da sistemima ugrade sposobnosti inteligentnog ponašanja kroz adaptaciju, učenje, autonomnost te rješavanje složenih problema. Zajednički nazivnik svim ovim istraživanjima jeste nova naučna oblast koja se danas zove Vještačka inteligencija. Vještačke neuronske mreže (*en. Artificial Neural Networks*), ANN spadaju u metode vještačke inteligencije čiji se koncept zasniva na konceptu rada ljudskog mozga. Kako je poznato primarna funkcija ljudskog mozga jeste da razvija načine percipiranja okoline i donošenje odluka na osnovu određenih mozgu poznatih činjenica. ANN metoda pokušava na sličan način razviti strategiju procesiranja podataka, postepenim učenjem o procesu koji je definisan preko skupa podataka za učenje[11]. Pioniri u razvoju vještačkih neuronskih mreža jesu McCulloch i Pitts, koji su 1943. uveli jednostavni matematički model neurona, kao osnovne ćelije nervnog sistema. Nešto kasnije 1957. godine Rosenblat uvodi pojam perceptrona, koji ima sposobnost učenja iterativnim načinom mijenjanja težinskih faktora. Danas vještačke neuronske mreže predstavljaju jednu od osnovnih metoda mašinskog učenja i vještačke inteligencije, koje koriste koncepte nadgledanog i nenadgledanog učenja u rješavanju

različitih problema, klasifikacije, regresije, vremenskih serija, procesiranja slike, robotike, internet pretraživanja, rudarenja podataka i dr[12].

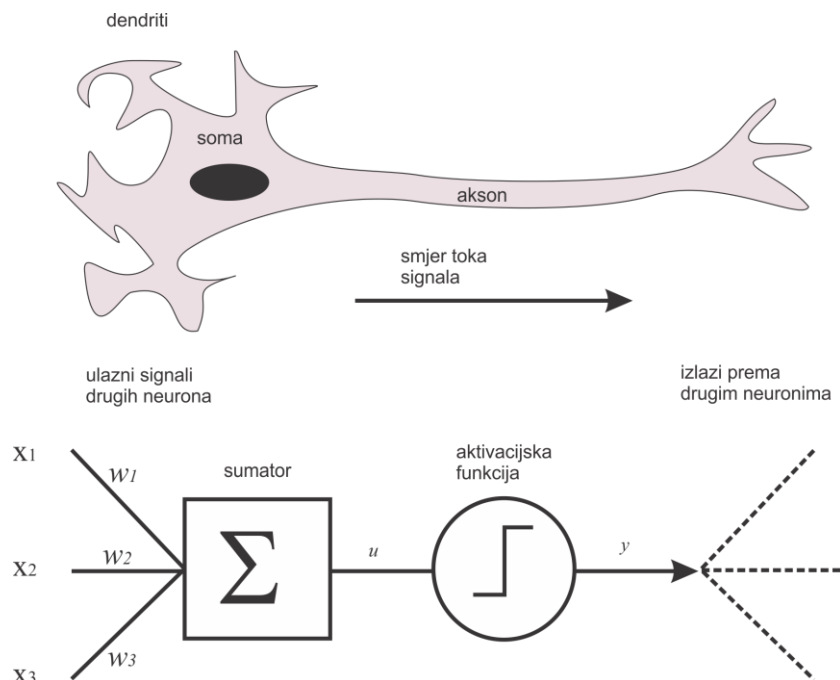
2.1. Koncept neuronskih mreža

Koncept vještačkih neuronskih mreža temelji se na neuronu koji predstavlja osnovnu ćeliju ljudskog mozga. Svaki neuron sastoji se od ulaznog dijela, tijela ćelije, izlaznog dijela te sinapse. Tijelo ćelije obrađuje signale koji dolaze od dendrita, a koji se kao obradjeni šalju na izlazni dio ćelije koji predstavlja razgranate krajeve ćelije koje zovemo akson. Neuron su povezani preko sinapse koja predstavlja mjesto razmjene impulsa sa jednog na drugi neuron.

Analogno biološkom neuronu, definiše se vještački neuron ili kraće neuron, koji posjeduje sličnu anatomiju. Vještački neuron definiše kao:

- skup ulaznih parametara x_i ($i=1,..,n$), a koji se mogu posmatrati kao ulazni signali biološkog neuron,
- skup težinskih faktora w_i ($i=1,..,n$), koji predstavljaju sinapse biološkog neurona,
- prag aktivacije w_0
- zbirna vrijednost ulaznih i težinskih faktora $\sum_{i=1}^n x_i w_i$, koje predstavlja tijelo ćelije,
- aktivacijska funkcija $a(.)$, koje predstavlja akson biološkog neurona,
- izlazna varijabla y , koja predstavlja potencijal izlaza biološkog neurona.

Shematski prikaz neurona dat je na slici 2.



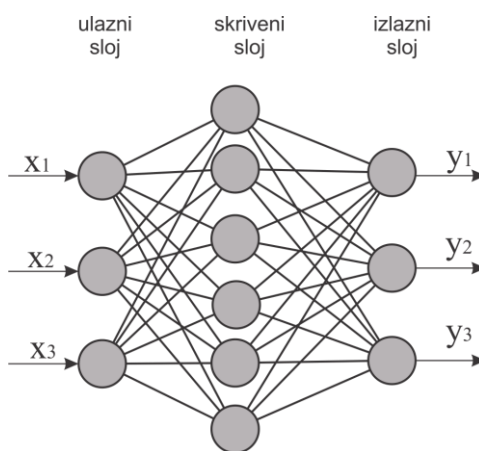
Slika 2: Shema biološkog i vještačkog neurona

Na osnovu izloženog, za skup ulaznih parametara x_i , i težinskih faktora w_i , pri čemu je definisana aktivacijska funkcija $a(.)$, izlaznu vrijednost y dobijamo preko[13]:

$$y = a \left(\sum_{i=1}^n x_i w_i + w_0 \right) \quad (1)$$

Nelinearna aktivacijska funkcija $a(\cdot)$, preslikava izlaznu vrijednost sumatora u izlazni signal neurona y . Ovaj izlaz u većini slučajeva je ograničen na interval $[0,1]$, mada postoje i druge aktivacijske funkcije poput bipolarnih koje vraćaju vrijednost u intervalu $[-1,1]$, odnosno na cijeli interval realnih brojeva. Najčešće korištene aktivacijske funkcije jesu: *logsig* koji može biti bipolaran, te *tansig* koji može vratiti vrijednost izlaza na cijeli interval realnih brojeva[13].

Neuronske mreže se najčešće sastoje od više neurona koji su raspoređeni u slojevima. Ovakav princip arhitekture neuronskih mreža zovemo višeslojne neuronske mreže ili višeslojni perceptron. Višeslojne neuronske mreže sastoje se od najmanje dva odnosno tri sloja zavisno od toga da li se skup ulaznih parametara tretira kao sloj. Shematski se višeslojne mreže predstavljaju slično kao što je to prikazano na slici 3.



Slika 3: Shema višeslojnog perceptrona

Kako se sa slike 3 vidi, svaki neuron u sloju povezan je sa svakim neuronom susjednog sloja, dok izlazi vanjskog sloja predstavljaju izlaze neuronske mreže. Kod svakog neurona definisana je nelinearna aktivacijska funkcija, dok kod neurona izlaznog sloja aktivacijska funkcija je linearna.

2.2. Učenje neuronske mreže algoritmom povratne propagacije greške

Slično kao i kod bioloških neuronskih mreža, osnovni proces predstavlja učenje mreže, u oba slučaja učenje započinje skupom određenih pravila za učenje. Kod vještački neuronskih mreža potrebno je obezbijediti skup podataka za učenje kojeg čine uređeni parovi ulaznih parametara x_1, x_2, x_3, \dots i izlazne varijable y . Zadatak neuronske mreže jeste da odredi sinaptičke težinske faktore w_i tako da zadovolji izraz (1). Proces učenja podrazumijeva korekciju težinskih parametara u određenom broju iteracija, tako da se minimizira greška E koja predstavlja razliku traženog i dobijenog izlaza. Kako se vidi, učenje neuronske mreže predstavlja optimizacioni problem minimizacije funkcije.

$$E = \frac{1}{2} \sum_k e_k^2 \quad (2)$$

Jedan od najpopularnijih i najčešće korišten algoritam učenja neuronske mreže jeste algoritam povratne propagacije greške (*en. error back-propagation*). Koncept ovog algoritma učenja svodi se na izračunavanje gradijenta od izlaznog sloja prema ulaznom sloju. Učenje neuronske mreže predstavlja iterativni proces pri kojem se definisanim algoritmom u svakoj iteraciji koriguju vrijednosti težinskih faktora i pragova aktivacije (*en. bias*) [13].

$$w_{k+1} = w_k + \Delta w_k, \quad (3)$$

Algoritam se bazira na činjenici da je prostiranje greške kroz slojeve neuronske mreže linearno, te da je aktivacijska funkcija diferencijabilna. Zbog toga smjer prostiranja greške određujemo gradijentom funkcije greške, odnosno parcijalnom derivacijom po težinskim faktorima:

$$\Delta w_k = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_k}, \quad (4)$$

Za vrijeme prostiranja signala od ulaza prema izlazu mreže, za svaki neuron određena je izlazna vrijednost. Povratna propagacija greške započinje u izlaznom sloju pri čemu se određuje greška e_i u i -toj iteraciji. Zatim se iz izlaznog sloja kreće prema unutrašnjim slojevima sve do ulaznog sloja. Kako je u prvom prolazu određeni izlazi za svaki neuron, u povratnom kretanju moguće je izračunati parcijalne derivacije za svaki neuron, odnosno korekcijsku vrijednost za svaki težinski faktor i prag aktivacije. Detaljan opis ovog postupka može se naći u literaturnim pregledima [14]. Korekcija težinskih faktora kod algoritma povratne propagacije greške opisuje se izrazom:

$$\Delta w_k = -\eta \cdot \delta_k \cdot o_k, \quad (5)$$

koje se još naziva i delta pravilo.

3. EKSPERIMENTALNO ISTRAŽIVANJE

Eksperimentalno istraživanje u ovom radu predstavlja definisanje neuronskog modela za određivanje i predikciju vrijednosti J integrala kao osnovnog parametara elasto-plastične mehanike loma. Skup podataka za treniranje i test bazirani su na rezultatima eksperimentalnog određivanja parametara mehanike loma datim u literaturnom pregledu [1]. Proces matematičkog modeliranja i određivanje neuronskog modela J integrala pratilo je nekoliko koraka, koji su se provodili korištenjem GPdotNET softverskog paketa specijaliziranog za modeliranje pomoću vještačkih neuronskih mreža i genetskog algoritma [2]. GPdotNET je open source projekat koje autor ovog rada razvija. Skup podataka za treniranje sastoji se od 44 eksperimentalna mjerenja, pri čemu su kao ulazni parametri predstavljali opterećenja epruvete F , te omjer dužine prsline i širine epruvete a/W . Kao izlazna varijabla predstavljena je vrijednost J Integrala. Rezultati eksperimentalnog određivanja J integrala prikazni su tabelom 1, gdje su eksperimentalne vrijednosti J integrala označene sa J_{exp} .

Definisanje neuronskog modela J integrala započinje učitavanjem eksperimentalnih rezultata u GPdotNET. Zatim se pristupilo podešavanju parametara neuronskih mreža, a nakon toga su se stekli svi uvjeti za započinjanje procesa učenja neuronske mreže, pomoću algoritma povratne propagacije greške. U toku traženja rješenja, osnovni zadatak jeste definisanje parametara neuronske mreže za koje će model najbrže konvergirati. Ovo predstavlja najzahtjevniji korak u modeliranju, jer se vrlo lako desi da nam je model „overfitted“, odnosno da ne daje prihvatljive rezultate testa. Za modeliranje J integrala korišteni su slijedeći parametri:

1. inercijski težinski faktor $w_i=0.9$,
2. stepen učenja, (en. learning rate) $\eta=0.05$
3. aktivacijska funkcija: signlog, sa amplitudom 2,
4. broj skrivenih slojeva $L_h=1$
5. Broj neurona u sloju $N_n=45$.

Shematski, vještačka neuronska mreža kojoj je definisan matematički model prikazana je na slici 3, u skladu sa definisanim parametrima.

Broj iteracija, trajanje procesa traženja, kao i iznos greške tokom traženja rješenja prikazano je na slici 4. Sa dijagrama greške učenja primjećujemo da je na samom početku konvergencija rješenja brzo tekla, odnosno da se greška učenja strmo približavala nuli, da bi poslije 30000 iteracija, konvergencija greške sporo tekla. Ovo je i očekivano jer se radi o velikom rasponu vrijednosti J integrala koje se kreću od 10 do 1000 kJ/m².

U tabeli 1, također, je prikazana kolona sa vrijednostima J integrala izračunata iz neuronskog modela, te označena sa J_{neuro} . Dok sa slici 3 se mogu vidjeti grafička odstupanja. Iz pomenutog dijagrama

B. Hrnjica, F. Islamović, Z. Burzić, Dž. Gačo – Modeliranje J integrala korištenjem vještačkih neuronskih mreža

uočavamo određenu razliku među vrijednostima za veličine J integrala koje prelaze 800 kJ/m². Ovo je i očekivano jer su iznosi J integrala preko ove vrijednosti daleko iznad granice kritične vrijednosti, pa praktično nemaju neku veću važnost.



Slika 4: GPdotNET Simulacija traženja rješenja.

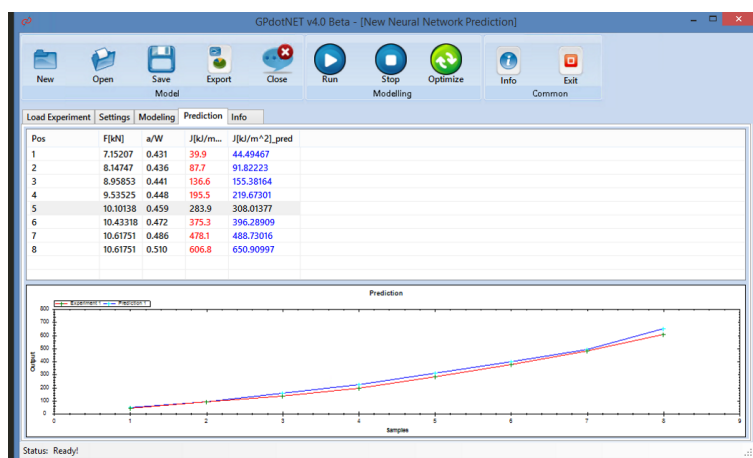
Tabela 1: Komparacija eksperimentalni i vrijednosti neuronskog modela

RB	F [kN]	a/W	J ^{exp} [kJ/m ²]	J ^{neural} [kJ/m ²]	RB	F [kN]	a/W	J ^{exp} [kJ/m ²]	J ^{neural} [kJ/m ²]
01	5,18519	0,508	18,6	35,9	23	8,75193	0,531	493,3	513,9
02	5,79353	0,474	27,5	30,4	24	6,71605	0,567	542,4	566,6
03	7,59712	0,394	42,7	41,6	25	11,43885	0,479	558,4	546,1
04	5,75309	0,510	50,7	54,3	26	8,62865	0,544	598,5	625,5
05	6,59476	0,476	63,3	52,2	27	6,49383	0,577	628,8	670,0
06	8,54676	0,399	86,6	81,0	28	11,39568	0,498	655,9	667,3
07	6,27160	0,514	89,6	88,2	29	8,44375	0,557	711,7	747,8
08	7,24191	0,481	107,2	91,7	30	6,19753	0,589	728,6	770,5
09	9,41007	0,405	141,6	138,1	31	11,17986	0,515	790,0	773,6
10	6,64136	0,520	144,7	134,9	32	5,85185	0,600	831,5	827,4
11	7,77743	0,488	164,7	150,1	33	8,07395	0,570	845,2	838,5
12	10,05072	0,417	199,4	199,6	34	5,50617	0,611	916,6	871,2
13	6,96296	0,529	220,1	211,1	35	10,70504	0,532	920,9	847,9
14	8,19723	0,499	229,9	232,3	36	7,70416	0,583	967,1	907,6
15	10,61871	0,434	269,1	279,3	37	7,15207	0,431	39,9	44,5
16	7,11111	0,537	295,8	284,5	38	8,14747	0,436	87,7	91,8
17	8,53621	0,510	306,8	329,4	39	8,95853	0,441	136,6	155,4
18	11,05036	0,449	352,5	364,5	40	9,53525	0,448	195,5	219,7
19	7,06173	0,546	379,2	357,4	41	10,10138	0,459	283,9	308,0
20	8,69029	0,521	388,4	421,9	42	10,43318	0,472	375,3	396,3
21	11,30935	0,465	451,3	457,9	43	10,61751	0,486	478,1	488,7
22	6,93827	0,555	457,0	440,0	44	10,61751	0,510	606,8	650,9

Testiranje evolucijskog modela sprovedeno je na posebnom eksperimentu koji je urađena za testiranje matematičkih modela, shodno literaturnom izvoru[1].

Na slici 5 vidimo testiranje neuronskog modela nad eksperimentalnim vrijednostima posebno izrađenog eksperimenta.

Sa slike možemo vidjeti kako tabelarno tako i grafički predstavljene podatke. Na slici 5, crvenom bojom (4 kolona na slici) je označena kolona sa eksperimentalnim vrijednostima J integrala, dok su plavom bojom (5-a kolona na slici) označene vrijednosti J integrala dobijene preko neuronskog modela. Kako se može vidjeti, podaci ukazuju da je predviđanje vrijednosti J integrala vještačkim neuronskim mrežama vrlo blisko eksperimentalnim, te da su razlike neznatne.



Slika 5 GPdotNET testiranje (predikcija) neuronskog modela.

Kako bi se pokazale kvantitativne osobine modela, sprovedena je statistička analiza koja pokazuje da matematički model dobro opisuje proces, te da po svim statističkim faktorima daje dobre vrijednosti. U tabeli 2 prikazane su vrijednosti koeficijenta determinacije i srednja kvadratna greška za vrijednosti matematičkog modela u odnosu na korespondentne vrijednosti skupa za učenje i skupa za testiranje.

Tabela 2: Statistička analiza neuronskog modela

	Ocjena učenja		
	R ²	MSE	MAE
Podaci za učenje	0,9963	2,85	591,5
Podaci za predviđanje	0,9989	13,4	262,7

Iz koeficijenta determinacije se vidi da model dobro opisuje proces. Također se vidi da model ima veći koeficijent determinacije kod skupa za testiranje, što također pokazuje da je model dobro modeliran, te da nije bilo odstupanja u pogledu podataka za testiranje.

3. ZAKLJUČAK

Pri ispitivanju parametara mehanike loma, većina industrijskih čelika spada u područje u kojem linearno-elastična mehanika loma nije primjenjiva. S toga se određivanje parametara mehanike loma proširuje na područje elasto-plastične mehanike loma, odnosno na određivanje J integrala kao osnovnog parametra. Eksperimentalno određivanje J integrala kao i ostalih parametara vrlo je zahtjevan i složen proces koji se izvodi po procedurama propisanim standardima[6,7,8,9,10]. Kako bi

se smanjila količina eksperimentalnih mjerenja, a u nekim situacijama i izbjegao koriste se različite metode pomoću koji se dolazi do vrijednosti parametara mehanike loma. Jedan od načina svakako predstavlja matematičko modeliranje. U ovom radu prikazano je modeliranje vrijednosti J integrala preko vještačkih neuronskih mreža, i algoritma za učenje sa povratnom propagacijom greške. Apliciranje ove metode urađeno je preko GPdotNET programa za modeliranje optimizaciju i linearno programiranje pomoću genetskog algoritma i neuronskih mreža. Rezultati koji su prezentirani u radu pokazuju da se može uspješno modelirati vrijednosti J integrala, a da su neuronske mreže vrlo pogodan alat za modeliranje. Statistička analiza pokazuje da je dobijeni model pouzdan, siguran i blizak traženim vrijednostima. S druge strane u radu je izvršena predikcija vrijednosti J integrala koja pokazuje da se vrijednosti J integrala može uspješno predvidjeti dobijenim matematičkim modelom.

5. LITERATURA

- [1] Hrnjica, B., „Numeričko-evolucijski pristup određivanja parametara mehanike loma posuda pod pritiskom“, *Doktorska disertacija*, Univerzitet u Bihaću, 2014.
- [2] Anderson, T.L., *Fracture Mechanics Fundamentals and Application Third Edition*, Taylor & Francis, New York, 2005.
- [3] Barsom, J. M. , Rolfe S. T., *Fracture and Fatigue Control in Structures: Applications of Fracture Mechanics*, ASTM International, West Conshohocken, 1999.
- [4] Hrnjica, B., GPdotNET V4.0- artificial intelligence tool [Computer program], <http://gpdotnet.codeplex.com>, datum 1.jun.2015.
- [5] Rice, J. R., *A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks*, Journal of Applied Mechanics, vol 35, 1968.
- [6] ASTM E 399-90: *Standard Test Method for Plane Strain Fracture Toughness of Metallic Materials*, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1990.
- [7] BS 7448-1997: *Fracture Mechanics Test, Part I: Method for Determination of K_{Ic}, Critical CTOD and Critical J Values of Metallic Materials*, British Standard Institution, London, 1997.
- [8] ISO 12737: *Metallic Materials – Determination of Plane-Strain Fracture Toughness*, International Organization for Standardization, Geneva, 1996.
- [9] BS 7448-1997: *Fracture Mechanics Test, Part I: Method for Determination of K_{Ic}, Critical CTOD and Critical J Values of Metallic Materials (British Standard Institution)*, London, 1997.
- [10] ISO 12135: *Metallic Materials – Unified Method of Test for the Determination of Quasistatic Fracture Toughness*, International Organization for Standardization, Geneva 1996.
- [11] Hassoun M.H., *Fundamentals of Artificial Neural Network*, MIT, Cambridge, 1995.
- [12] Kishan M, Chilukuri K.M, Sanjay R., *Elements of Artificial Neural Networks*, MIT, Cambridge, Second Edition, 2000.
- [13] Michael A. Nielsen, „*Neural Networks and Deep Learning*“, Determination Press, 2015
- [14] Kevin Gurney, „*An Introduction to Neural Network*“, UCL Press, 1999.