UPOREDNA ANALIZA GRADIJENTNIH I HEURISTIČKIH METODA KOD OPTIMIZACIJE KONZOLE
COMPARATIVE ANALYSIS OF GRADIENT AND HEURISTIC METHODS IN CANTILEVER BEAM OPTIMIZATION

Ermin Husak[1], Isak Karabegović[2], Safet Isić[3]
[1,2]Univerzitet u Bihaću, Tehnički fakultet Bihać,
dr. Irfana Ljubijankića bb., erminhusak@yahoo.com, isak1910@hotmail.com
Univerzitet Džemal Bijedić, Mašinski fakultet Mostar,
Univerzitetski kampus, 88104 Mostar, safet.isic@unmo.ba

SAŽETAK:
U ovom radu dat je primjer optimizacije konzole. Prvo je predstavljen osnovni princip dimenzionisanja analitičkim putem a zatim prelazak na dimenzionisanje konačnim elementima. Utvrđen je način pronalaska minimalne težine konzole, što je direktno dovelo do optimizacije čiji je osnovni cilj pronalazak najboljih rješenja. Dat je konkretan primjer konzole koju smo optimizirali sa četiri metode: nelienernim programiranjem, genetskim algoritmima, rojem čestica i kolonijom mrava. Na kraju rada smo uporedili i analizirali dobijene rezultate.

Ključne riječi: *konzola, optimizacija, genetski algoritmi, optimizacija rojem čestica, optimizacija kolonijom mrava.*

ABSTRACT:
In this paper an example of cantilever beam optimization is given. First, basic principle of analytical dimensioning of cantilever beam is presented and then move on to dimensioning by finite elements. A way of finding minimal weight of cantilever beam was established which directly led to optimization to find best solution. A concrete example of cantilever beam which was optimized with four methods: nonlinear programming, genetic algorithm, particle swarm optimization and ant colony optimization is give. At the end of the paper, results was compared and analyzed.

Keywords: *cantilever beam, optimization, genetic algorithm, particle swarm optimization PSO, ant colony optimization ACO.*

---

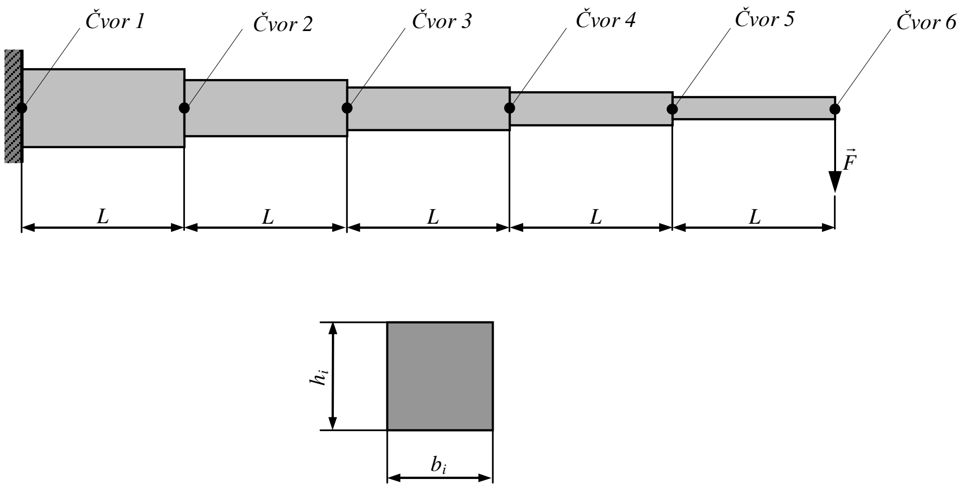
1. UVOD

Da bi prikazali uporednu analizu gradijentnih i heurističkih metoda kod optimizacije elastičnih sistema koristićemo se primjerom optimizacije konzole. Optimizacija konzole u ovom primjeru podrazumjeva traženje minimalnog volumena nosača. Kako nam je poznato dijagram momenta kod konzole koja je opterećena silom na svome kraju mjenja se linearno od vrijednosti 0 na mjestu djelovanja sile do vrijednosti maksimalnog momenta $F{\cdot}l$ u mjestu uklještenja (gdje je l dužina konzole). Ustaljen način dimenzionisanja ovakvih nosača je na osnovu analitičkih izraza koji su dati u različitoj litaraturi koja se bavi čvrstoćom materijala, gdje je osnovna veličina koja se koristi u dimenzionisanju upravo maksimalni moment. Pri takvom dimenzionisanju odredi se površina poprečnog presjeka koja je kontinuirana duž čitavog nosača. Poznato je da u tom slučaju napon u

nosaču nije isti tj. da napon opada kako se krećemo od tačke uklještenja do tačke djelovanja sile. Što znači da nije potrebno da poprečni presjek bude kontinuiran već da se može mijenjati duž nosača. Idealno bi bilo da se mijenja po zakonitosti po kojoj se mijenja i moment. Šta bi bio razlog ovakvog dimenzionisanja? Najčešći razlog koji se spomininje je smanjenje težine nosača i ušteda na materijalu, što svakako ovisi od obima problema koji se analizira. Najčešće pitanje koje se postavlja kako izvesti takvu konstrukciju kada se konačno dimenzioniše sa promjenjivim površinama poprečnih presjeka? U starijoj literaturi prijedlog je bio da se to rješava spajanjem lamela zakivanjem ili nekim drugim postupkom da bi se formirao potreban oblik [1]. Savremene aditivne tehnologije su rješile i taj problem (npr. stereolitografija, selektivno lasersko sinterovanje, 3D printanje itd.) [2]. Slaganjem sloja materijala jedan na drugi pomoću savremenih kompjuterski upravljanih mašina možemo dobiti gotovo nezamislive oblike. Bitno je spomenuti da ova fuzija traženja optimalnih dimenzija i oblika sa aditivnom tehnologijom nigdje nije bolje vidljiva nego kod dobijanja MEMS (mikro elektro-mehaničkih sistemi) uređaja, o čemu smo posebno pisali u radu [3].
Kod dimenzionisanja lamelama sami autori navode neekonomičnost takvog proračuna i izrade. Dok autori [4] navode opravdanost korištenja numeričke analize i korištenja aditivnih tehnologija.

2. OPTIMIZIRANJE KONZOLE

Promjena povšina poprečnih presjeka na konzoli najlakše se postiže korištenjem konačnih elamanata. Svaki konačni element može imati svoju površinu poprečnog presjeka što će nam formirati nosač različitih poprečnih presjeka. Što imamo više konačnih elemenata to će se oblik grede probližavati idealnom. Za analizu tj. dimenzionisanje sistema koji se sastoji od konačnih elemanta koristi se numerička metoda konačnih elemenata. Ovo može biti relativno jednostavan problem ali ako definišemo oblik poprečnog presjeka, granice koje taj oblik poprečnog presjeka mora imati kao i ograničenja na ponašanje sistema kao što su pomjeranja tačaka i naprezanja u konačnim elementima problem se strahovito usložnjava. Ako ješ tražimo minimalnu težinu onda to zovemo optimizacijom elastičnog sistema tj. konzole.



Slika 1: Konzola sa pet konačnih elemenata

Za optimizaciju elastičnih sistema koriste se razne metode. Osnovnu podjelu ćemo napraviti su na gradijentne i heurističke metode. Gradijentne metode su do sad već poprilično objašnjene i istražene kako za probleme optimizacije elastičnih sistema tako i u problemima drugih oblasti. Heurističke metode detaljnije objašnjavamo u drugom radu ove konferencije. Cilj ovog rada je uporediti i analizirati rezultate dobijene optimizacijom gradijentnim i heurističkim metodama konzole promjenjivog poprečnog presjeka. Za naš primjer optimizacije uzimamo konzolu koja čini pet linijskih grednih konačnih elemenata kao što je prikazano na slici 1. Ovaj problem konzole je K.

Svanberg [5] koristio za uporedbu MMA metode, kada je ova metoda razrađena, sa drugim metodama. Također sličan primjer se može naći u [6]. Mi ćemo optimirati ovu konzolu sa četiri metode: nelinearno programiranje, genetski algoritmi, metoda roja čestica i metoda kolonije mrava.
Konzola ima šest čvorova. Konzola je oslonjena u čvoru 1 dok je opterećena silom F u čvoru 6. Svi konačni elementi imaju istu dužinu L. Poprečni presjeci svakog od konačnih elemenata su kvadratni sa stranicama b_i i h_i. Kao funkciju cilja postavljamo minimalan volumen konzole jer je volumen direktno povezan sa masom konzole.

$$V=l\,(b_1\cdot h_1+b_2\cdot h_2+b_3\cdot h_3+ b_4\cdot h_4+ b_5\cdot h_5) \tag{1}$$

Ako svaku od stranica uzmemo kao varijablu imaćemo 10 varijabli a volumen nam predstavlja funkciju cilja predhodna jednačina postaje

$$f_{min}=l\,(x_1\cdot x_2+x_3\cdot x_4+x_5\cdot x_6+ x_7\cdot x_8+x_9\cdot x_{10}) \tag{2}$$

Uz funkciju cilja postaljamo sljedeća ograničenja
- Makismalno pomjeranje konzole u čvoru 6 je : δ=2,7 cm
- Maksimalno dozvoljeno naprezanje u svakom konačnom elementu σ_{max}=14 000 N/cm^2

Ostali podaci potrebni za optimizaciju su: Sila F=50 000 N, dužina konačnog elementa L=100 cm, modul elastičnosti svakog konačnog elementa E=2·10^7 N/cm^2 .
Svaka varijabla može se ograničiti sa donje i sa gornje strane, ovisno od tog kakvi su zahtjevi. Oni mogu biti konstrukcione prirode kao što su npr. standardne veličine materijala, mada korištenjem aditivnih tehnologija u nekim primjerima to se može izbjeći. Za primjer optimizacije konzole u svrhu upredbi optimizacijskih metoda postaviljena su sljedeća ograničenja: $1 \le x_1 \le 5$, $30 \le x_2 \le 65$, $2{,}4 \le x_3, x_5 \le 3{,}10$, $45 \le x_4, x_6 \le 60$, $1 \le x_7, x_9 \le 5$, $30 \le x_8, x_{10} \le 65$. Kako se može vidjeti varijable x_3 *i* x_5 kao i varijable x_4 *i* x_6 imaju uže granice što još dodatno usložnjava problem, jer je za konzolu logično da svaki sljedeći konačni element ima manje vrijednosti varijabli od predhodnog. Postavljanjem ovakvih granica to u većini slučajeva neće biti osigurano. Pošto je cilj da ipak imamo stepenast pad poprečnog presjeka konzole postavljamo još uvjet da je odnos veće i manje varijable na jednom presjeku manje od 20.

3. UPOREDNA ANALIZA REZULTATA OPTIMIZACIJE

Optimizacije su uražene pomoću sljedećih metoda:
- gradijentna metoda nelinearnog programiranja
- heurističke metode: genetski algoritmi (GA), optimizacija rojem čestica (PSO - particle swarm optimization) i optimizacija kolonijom mrava (ant colony optimization).

Dobijene vrijednosti varijabli i funkcija cilja su date u sljedećoj tabeli.

Tabela 1: Rezultati optimizacije konzole

	NP	GA	PSO	ACO-SO	ACO-BO
x_1	3.1852	3.0212	3.0817	3.0080	3.1280
x_2	61.0932	60.4245	61,6344	59.7500	62.8300
x_3	2.7986	2.8287	2,7863	2.9544	2.6254
x_4	55.9711	56.5730	55,7154	54.7500	59.8800
x_5	2.5425	2.5536	2,6861	3.0104	2.6128
x_6	50.2836	51.0711	49,2655	53.3100	49.9800
x_7	2.3993	2.2046	2,2078	3.1200	1.8240
x_8	42.3066	44.0911	44,1570	40.9200	48.6200
x_9	1.7498	1.7503	1,7704	2.1600	1.6080
x_{10}	34.9951	34.9893	35,4080	39.5200	36.9300
F_{cilja}=*Vol.*	64 182	63 144	63 771	71 500	63 240

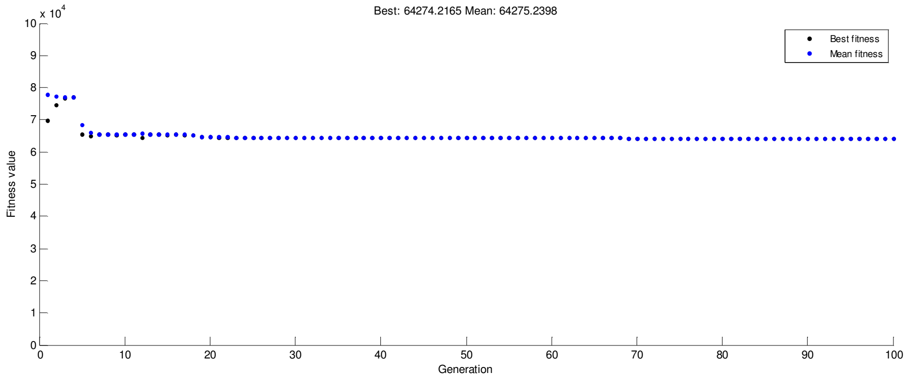
Dobijene rezultate možemo analizirati prema dva kriterija. Prvi kriterij je svakako kvaliteta dobijenog rješenja. Kao što vidimo iz tabele 1 dobijene vrijednosti funkcije cilja nisu značajno različite. Rezultati pokazuju da su vrijednosti funkcije cilja nešto manje kod heurističkih – populacijskih metoda ali vrijeme pronalaska tih rješenja traje mnogo duže nego kod gradijentnih metoda.

Druga kolona tabele 1 daje vrijednosti varijabli i funkcije cilja za metodu nelinearnog programiranja. Dobijeni rezultat funkcije cilja ne znači da je konačan tj. minimalan za ovaj problem. Kod ovakvih metoda rješenje optimizacije značajno ovisi od postavljenog početnog rješenja tj. početne tačke iz koje kreće optimizacija. Prednost ovih metoda što prema kriteriju vremena mnogo je bolja od heurističkih metoda.

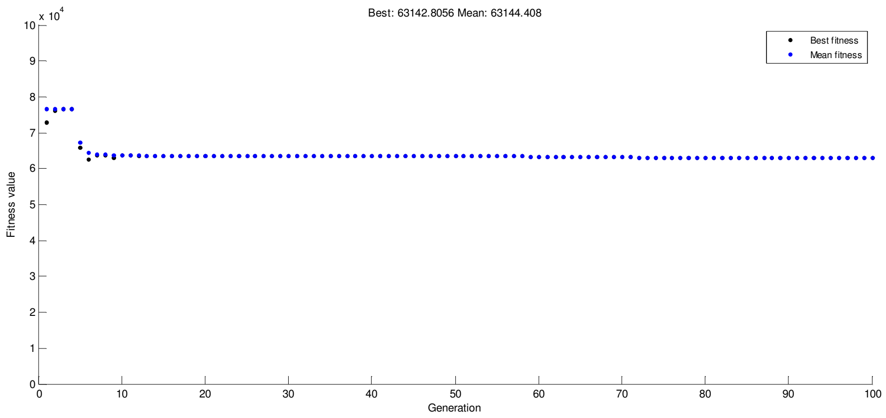
Heurističke metode su populacijske metode. Kvalitet rješenja značajno ovisi od populacije jedinki koje se koriste u optimizaciji. Istraživanja pokazuju da će se bolje rješenje dobiti ako koristimo veće populacije. Nedostatak je taj da se povećanjem populacije povećava i vrijeme optimizacije.

U trećoj koloni predstavljeni su rezultati varijabli i funkcije cilja kod optimizacije gentskim algoritmom. Ova metoda detaljnije je objašnjena u drugom radu ove konferencije. Prema kvalitetu rješenja funkcije cilja ova metoda je dala najbolje rješenje tj. ima najmanju vrijednost volumena konzole uz zadovoljavanje svih kriterija. Na sljedećoj slici 2 dat je tok dobijanja rješenja kroz stotinu generacija kod populacije od 100 i 500 jedinki.

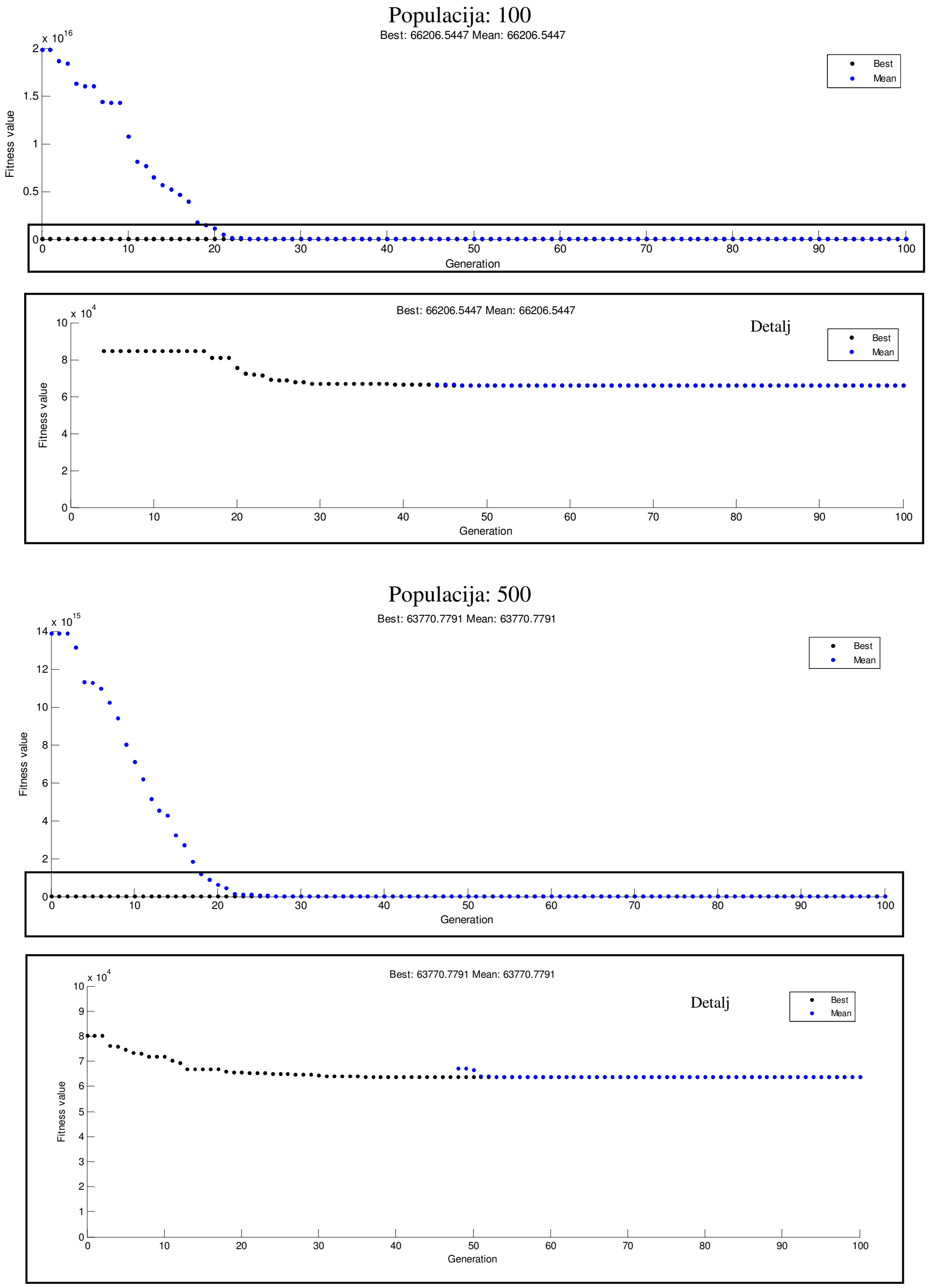
Populacija: 100



Populacija: 500



Slika 2: Optimizacija GA sa populacijom 100 i 500 jedinki



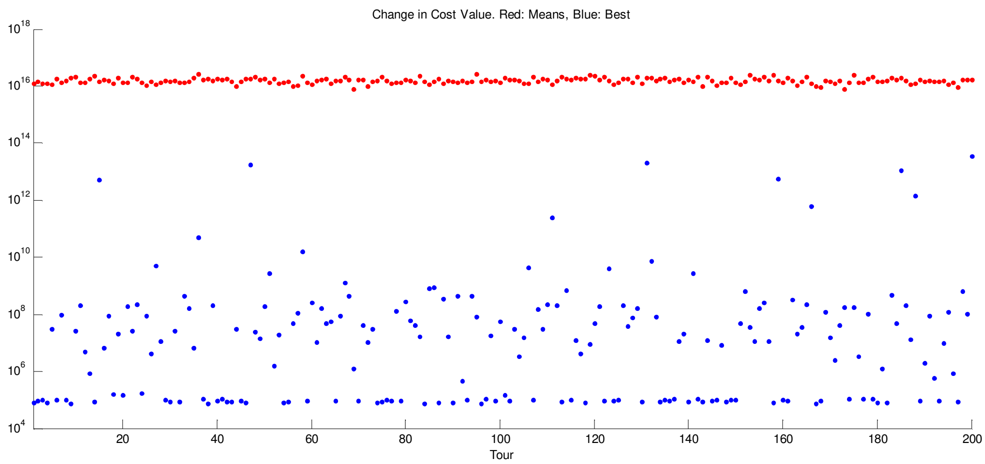
Slika 3: PSO sa 100 i 500 jedinki

Nelinearno programiranje i genetski algoritmi dopuštaju postavljanje zasebnih funkcija ograničenja bilo da se radi o ograničenjima jednakosti ili ograničenjima nejednakosti. Ograničenja kod

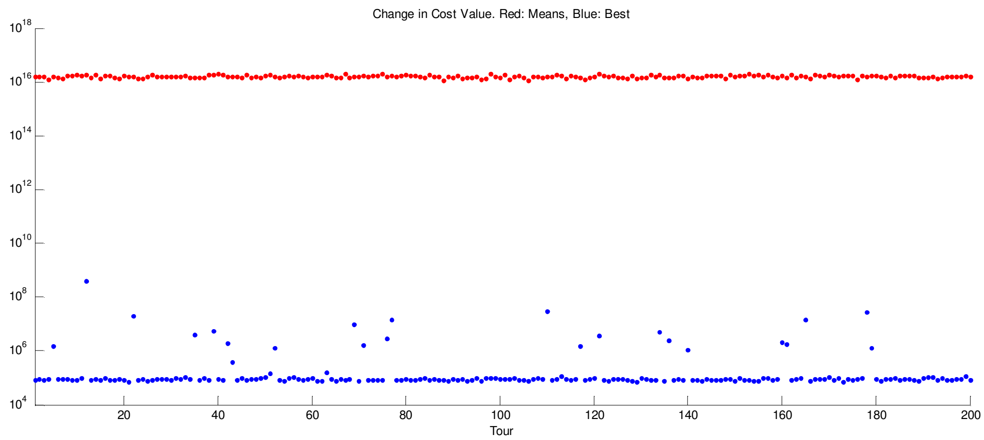
optimizacije rojem česica i optimizacije kolonijom mrava ograničenja moraju biti ugrađena pomoću kaznene funkcije u funkciju cilja.
U koloni 4 tabele 1 date su vrijednosti varijabli i funkcije cilja dobijene optimizacijom rojem čestica. To je druga metoda po redu prema kriteriju kvalitete rješenja. Funkcija cilja je dobijena uz zadovoljavanje svih ograničenja iako se optimizira preko kaznene funkcije. Također bolje rješenje je dobijeno sa većom populacijom. Vremensko trajanje ove metode je kraće u odnosu na GA ali je duže u odnosu na NP. Na slici 3 vidimo tok optimizacije pomoću PSO za populaciju od 100 i 500 jedinki.

Posljednja metoda koju smo koristili u optimizaciji konzole je bila metoda kolonije mrava. Kako se može vidjeti u tabeli 1 ovu metodu smo podjelili u dvije kolone radi značajne razlike u rezultatima. Pošto smo za ovu metodu koristili ista ograničenja kao i kod predhodnih metoda dobijeni rezultati koju su prikazani u koloni 5 značajno odstupaju od dobijenih rezultata drugim metodama, kako po samoj vrijednosti funkcije cilja tako i vrijednosti varijabli jer se primjeti da nije ispoštovano ograničenje koje se odnosi na raspored poprečnih presjeka. Na slici 5 vidimo promjene vrijednosti funkcije cilja kod populacije 100 i 500.

Populacija 100



Populacija 500



Slika 4: ACO sa 100 i 500 jedinki

Pošto je rezultat bio bio poprilično loš, pretpostavka je da je problem previše ograničen za ovu metodu, pa smo maknuli ograničenja koja se odnose na raspored poprečnih presjeka iz kaznene funkcije. Nedostatak ovog ograničenja smo nadoknadili povećanjem ponavljanja optimizacije gdje smo svaki put provjeravali da li je raspored varijabli zadovoljavajući. Dobijeni rezultati su u koloni 6. Kao što možemo vidjeti dobili smo dobar rezultat sa opadajućim rasporedom presjeka s tim da taj odnos nije kao i kod predhodnih metoda.

4. ZAKLJUČAK

Na osnovu postavljenog problema i provedene optimizacije konzole koristeći se gradijentnim i heurističkim metodama može se izvući nekoliko zaključaka. Kvalitet rezulatata možemo ocjeniti prema nekoliko kritrija. Prema kriteriju najboljeg rezultata funkcije cilja vidimo da najbolji rezultat dobijemo genetskim algoritmom, potom optimizacijom rojem čestica, potom kolonijom mrava ali sa umanjenim ograničenjima, potom nelineanim programiranjem dok optimizacija kolonijom mrava sa maksimalnim ograničenjima daje značajno lošiji rezultat. Što se tiče kriterija brzine optimizacije svakako na prvom jestu je nelinearno programiranje, potom optimizacija rojem čestica tek na posljednjem mjestu su genetski algorimi. Raspored vrijednosti varijabli je kako vidimo najlošiji kod kolonije mrava.

5. LITERATURA

[1] J. Ninković: *Otpornost materijala I,* Mašinski fakultet univerziteta u Sarajevu, Sarajevo 1979. pp. 192-207.

[2] E. Karabegović, M. Brezočnik, M. Mahmić i dr.: *Nove tehnologije u proizvodnim procesima,* Mašinski fakultetMostar-Fakultet za strojništvo Maribor, Mostar 2014. pp. 5-52.

[3] E. Husak, I. Karabegović**,** M. Đukanović, M. Mahmić, (2014), Optimizacija struktura u razvoju mikro-elektro-mehaničkih sistema, *28. Međunarodni simpozij "Elektroinženjerski simpozij" Nove tehnologije - EIS 2014 – SONT 2014*, Šibenik, 06.05.2014, S3.(ISSN:1848-0772) pp.60-64

[4] W. Nadir, Y. Kim, Structural Shape Optimization Considering Both Performance and Manufacturing Cost, *AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference* 30 August - 1 September 2004, Albany, New York.

[5] K. Svanberg, The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization, *International journal for numerical methods in engineering,* Vol. 24, n.2, 1987. pp. 359 – 373

[6] http://www.mathworks.com/help/gads/examples/solving-a-mixed-integer-engineering-design-problem-using-the-genetic-algorithm.html (1.2.2015.)