METODE MATEMATIČKOG PROGRAMIRANJA ZA RJEŠAVANJE OTVORENOG PROBLEMA ALOKACIJE

Fatka Kulenović, Aladin Crnkić
Tehnički fakultet, Bihać, dr. I. Ljubijankića bb, Bosna i Hercegovina, kulen.a@bih.net.ba

Ključne riječi: alokacijski problem, resursi, otvoreni problem, optimalno raspoređivanje, NP-teški problemi, Mađarska metoda

SAŽETAK:

Pojam "alocirati" znači dodijeliti (engleski assignment) ili rasporediti određenu količinu resursa nekom ili nečem. Problem alokacije služi za određivanje optimalnog načina raspoređivanja n elemenata (npr. radnika) na m mjesta (npr. poslova). Kada je broj elemenata i mjesta isti radi se o zatvorenom problemu alokacije, a ako je različit radi se o otvorenom problemu alokacije. Za svakog radnika zadana je njegova efikasnost na svakom od pojedinih poslova ili vrijeme izvršenja posla. Cilj problema je rasporediti sve radnike na poslove tako da svakom radniku pripadne tačno jedan posao i tako da svaki posao obavlja tačno jedan radnik. Pri tome razlikujemo dvije vrste problema: ako je potrebno da je ukupna efikasnost maksimalna (problem maksimuma), a ako je potrebno da je ukupno vrijeme izvršenja poslova minimalno (problem minimuma). Iako koncepcijski veoma jasan i jednostavan, problem je zbog svoje faktorijelne složenosti veoma težak za rješavanje, čak toliko da pripada grupi NP-teških problema. Danas se za egzaktno rješavanje ovog problema najčešće koristi Mađarska metoda uz primjenu odgovarajućih softvera..

1. UVOD

Problem alokacije služi za određivanje optimalnog načina raspoređivanja n elemenata (npr. radnika) na m mjesta (npr. poslova, strojeva), i to tako da je svaki radnik raspoređen jednom i samo jednom poslu. Kada je broj elemenata i mjesta isti radi se o zatvorenom problemu alokacije. Za svakog radnika zadana je njegova efikasnost na svakom od pojedinih poslova. Cilj je rasporediti sve radnike na poslove tako da svakom radniku pripadne tačno jedan posao i tako da svaki posao obavlja tačno jedan radnik. Pri tom želimo da ukupna efikasnost bude maksimalna (problem maksimuma). Ako imamo zadana vremena obavljanja posla za svakog radnika i svaki posao onda minimiziramo ukupno vrijeme (problem minimuma). Ako se broj radnika i broj poslova razlikuju radi se otvorenom problemu alokacije. Tada dopisujemo fiktivne poslove, toliko njih koliko je potrebno da se problem zatvori. Efikasnost osobe na fiktivnom poslu je 0. Sve ostalo je isto kao kod zatvorenog problema alokacije.

Savremeni pristup upravljanju projektima, osim visokog nivoa znanja svih učesnika u realizaciji postavljenog zadatka zahtijeva i najpovoljniji raspored izvršitelja aktivnosti unutar postojećeg sistema. Pod najpovoljnijim se podrazumijeva onaj raspored čijom se realizacijom postiže maksimum ili minimum funkcije cilja zavisno od zadanog problema. Zbog toga je raspoređivanje izvršitelja veoma važan faktor za planiranje i uspješnu realizaciju postavljenih zadataka. Pri rješavanju problema raspoređivanja radnika na pojedine poslove ili neke strojeve, odluke su se donosile i još se najčešće donose na osnovu profesionalnih osjećaja i intuicije, a veoma malo na osnovu egzaktnih metoda. Dobro intuitivno osjećanje temelji se na iskustvu i znanju stečenom obrazovanjem, ali sa sobom nosi i manje-više izraženu mogućnost pojave subjektivne pogreške slučajnog karaktera. Ovi problemi su veoma često predmet istraživanja, a glavni razlog su velike mogućnosti praktične primjene u raznim oblastima. Alokacijski problem spada u NP-teške probleme kombinatorne optimizacije tj. u probleme za čije rješavanje nisu poznati algoritmi s vremenom računanja koje je zavisno od veličine problema, tj. čija se složenost može izraziti polinomnom funkcijom (npr. linearnom, kvadratnom, kubnom,...) [1].

2. FORMULACIJA OTVORENOG PROBLEMA ALOKACIJE

Na primjer, ako treba rasporediti dva radnika na dva stroja, na raspolaganju su dvije mogućnosti, jer se svaki radnik može rasporediti na jedan ili drugi stroj. Raspoređivanjem jednog radnika određen je izbor i za drugoga. Povećanjem broja strojeva i radnika do nekog broja n, broj raspoloživih mogućnosti $P(n)$ povećava se po zakonu $P(n) = n!$ i jednak je broju permutacija od n elemenata. Ako se broj radnika i broj poslova (strojeva) razlikuju radi se otvorenom problemu alokacije. Tada dopisujemo fiktivne poslove, toliko njih koliko je potrebno da se problem zatvori. Ako je broj radnika (n) veći od broja raspoloživih strojeva (m), broj mogućnosti angažiranja radnika na strojevima (P) iznosi: $P = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\ m!}$. Sposobnost radnika da rukuje nekim strojem veoma je značajna za praktičnu efikasnost stroja i pri računanju praktične efikasnosti treba je uzeti u obzir kao koeficijent radnika k_R. Vrijednost ovog koeficijenta, u izrazima za račun praktične efikasnosti strojeva, kreće se od 0 do l i računa se po izrazu:

$$k_R = \frac{O_P}{10} \tag{1}$$

pri čemu je:

O_P – ocjena izučenih radnika za rad na pojedinim strojevima.

Izraz za račun praktične efikasnosti ima kod svih strojeva isti oblik, pri čemu se pojavljuju razlike ovisno o tehničkim osobinama stroja i vrste posla za koji je namijenjen. Tako izraz za račun praktične efikasnosti stroja glasi:

$$U_P = k_R U_T \tag{2}$$

pri čemu su:

U_P – praktična efikasnost stroja

U_T – teorijska efikasnost stroja

k_R – koeficijent radnika po izrazu (1). Ako za izvršenje nekog postavljenog zadatka na raspolaganju ima n strojeva na koje treba rasporediti m radnika, pri čemu je sposobnost radnika i $(i = 1,2,...,n)$ za rad na stroju j $(j = 1,2,...,m)$ definisana koeficijentom $k_{R,ij}$, čija je vrijednost poznata, mogu se, prema izrazu (2) izračunati sve vrijednosti U_{ij}, odnosno praktičnu efikasnost stroja j kada njime upravlja radnik i. Od ovih vrijednosti formira se matrica praktične efikasnosti U (tabela 1), u kojoj svaki red pripada po jednom radniku, dok su strojevima dodijeljene kolone.

Tabela 1: Matrica praktične efikasnosti

Strojevi Radnici	S_1	$\cdots$	S_j	$\cdots$	S_m
R_1	U_{11}	...	U_{1j}	...	U_{1m}
...	...	...	...	...	...
R_i	U_{1i}	...	U_{ij}	...	U_{im}
...	...	...	...	...	...
R_n	U_{n1}	$\cdots$	U_{ni}	$\cdots$	U_{nm}

2.1 Matematička formulacija problema

Cilj raspoređivanja radnika na strojeve jest postizanje najpovoljnije efikasnosti datog sistema. Zbog toga se kao kriterij za ocjenu efikasnosti u ovoj analizi koristio intenzitet efikasnosti, odnosno trenutni potencijal ili nivo efikasnosti sistema, koji je definisan kao efikasnost (kapacitet) sistema u odabranoj jedinici vremena [2].
Funkcija cilja može se definisati kao:

$$\max F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \tag{3}$$

pri čemu je:

F – funkcija cilja (intenzitet efikasnosti sistema)
c_{ij} – intenzitet efikasnosti j – tog stroja kad njime rukuje i – radnik, a izračuna se prema izrazu za praktičnu efikasnost U_p – za svaki stroj
x_{ij} – varijabla s vrijednostima 1 ili 0 koja označava je li i – ti radnik raspoređen na j – ti stroj $(x_{ij} = 1)$ ili nije $(x_{ij} = 0)$.
Navedena definicija varijabli x_{ij} nameće sljedeće uslove ograničenja:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \ (i = 1,2,\ldots,n) \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (j = 1,2,\ldots,m) \tag{5}$$

uz uslov:

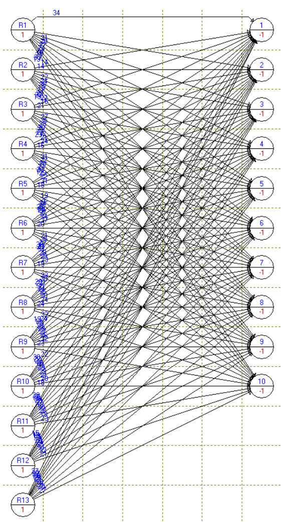
$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ako je } \ i - \text{ti radnik na } j\text{ - tom stroju} \\ 0, \ \text{u suprotnom} \end{cases} \tag{6}$$

Prvim ograničenjem (4) u ovom matematičkom modelu osigurava se da jedan stroj može biti raspoređen samo jednom radniku, dok drugo ograničenje (5) osigurava da jedan radnik može biti raspoređen samo na jedan stroj. Kako broj strojeva ne mora biti jednak broju radnika, ovaj zadatak u opštem slučaju pripada otvorenim problemima. Ako matematički aparat to zahtijeva, svođenje otvorenog problema na zatvoreni može se ostvariti dodavanjem potrebnog broja redova ili kolona kako bi se dobila kvadratna matrica, s tim što bi u dodatnim redovima i kolonama sve vrijednosti bile jednake nuli. Međutim, danas se najčešće koristi Mađarska metoda za egzaktno rješavanje problema koja je posebno razvijena za problema raspoređivanja. Sastoji u reduciranju matrice individualnih efikasnosti i dobivanju n nezavisnih nula (dvije ili više nula ne pripadaju istom vektoru). Te nule daju optimalno rješenje alokacije. Postupak se izvodi kroz četiri osnovna koraka [3].

Primjer:
Za podatke u tabeli (vrijeme izrade proizvoda na datim strojevima) potrebno je rasporediti $n=13$ radnika na $m=10$ strojeva tako da se minimizira ukupno vrijeme posla.

Tabela 2: Vrijeme izrade proizvoda za svakog radnika na strojevima

n / *m*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R1	34	31	20	27	24	24	18	33	35	19
R2	14	14	22	34	26	19	22	29	22	19
R3	22	16	21	27	35	25	30	22	23	23
R4	17	21	24	16	31	22	20	27	26	17
R5	17	29	22	31	18	19	26	24	25	14
R6	26	29	37	34	37	20	21	25	27	27
R7	30	28	37	28	29	23	19	33	30	21
R8	28	21	30	24	35	20	24	24	32	24
R9	19	18	19	28	28	27	26	32	23	22
R10	30	22	29	19	30	29	29	21	20	18
R11	29	25	35	29	27	18	30	28	19	23
R12	15	19	19	33	22	24	25	31	33	21
R13	27	32	27	29	29	21	19	25	20	27



Slika 1: Grafički model problema

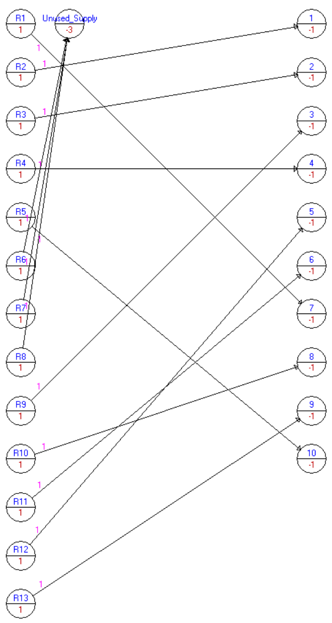
Sa slike 1 je vidljivo koliko je složen ovaj problem zbog velikog broja mogućnosti. Na slici 2 je prikazano optimalno rješenje rasporeda radnika na strojeve za zadane ulazne podatke. Rješenje je dobiveno pomoću softver-a WinQSB [4].

Radnici13: Minimization (Assignment Problem)

10-08-2013	From	To	Assignment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	R1	7	1	18	18	0
2	R2	1	1	14	14	0
3	R3	2	1	16	16	0
4	R4	4	1	16	16	0
5	R5	10	1	14	14	0
6	R6	Unused_Supply	1	0	0	0
7	R7	Unused_Supply	1	0	0	0
8	R8	Unused_Supply	1	0	0	0
9	R9	3	1	19	19	0
10	R10	8	1	21	21	0
11	R11	6	1	18	18	0
12	R12	5	1	22	22	0
13	R13	9	1	20	20	0
	Total	Objective	Function	Value =	178	

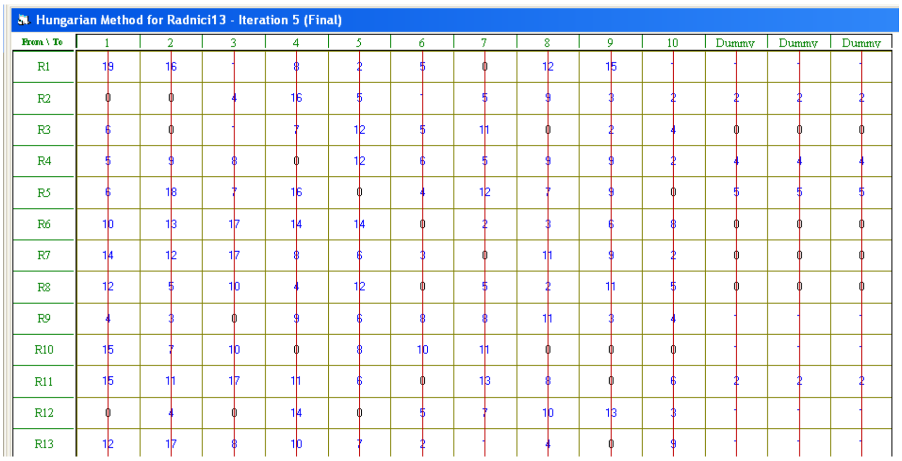
Slika 2: Optimalno rješenje problema minimuma

Iz slika 2 je vidljivo da je minimalno vrijeme rada iznosi 178 i postiže se kad 1. radnik radi na 7. stroju, 2. radnik radi na 1. stroju, 3. radnik radi na 2. stroju, 4. radnik radi na 4. stroju, 5. radnik radi na 10. stroju, 9. radnik radi na 3. stroju, 10. radnik radi na 8. stroju, 11. radnik radi na 6. stroju, 12. radnik radi na 5. stroju i 13. radnik radi na 9. stroju. Radnici 6. 7. i 8. su neraspoređeni. Na slici 3 prikazano je grafičko rješenje.



Slika 3: Optimalno rješenje problema minimuma na grafu

Proces rješavanja primjenom Mađarske metode za problem minimizacije vremena rješenje problema se sastoji od 5 iteracija. Rezultat zadnje iteracije prikazan je na slici 4.



Hungarian Method for Radnici13 - Iteration 5 (Final)

From \ To	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Dummy	Dummy	Dummy
R1	19	16		8	2	5	0	12	15				
R2	0	0	4	16	5		5	9	3	2	2	2	2
R3	6	0		7	12	5	11	0	2	4	0	0	0
R4	5	9	8	0	12	6	5	9	9	2	4	4	4
R5	6	18	7	16	0	4	12	7	9	0	5	5	5
R6	10	13	17	14	14	0	2	3	6	8	0	0	0
R7	14	12	17	8	6	3	0	11	9	2	0	0	0
R8	12	5	10	4	12	0	5	2	11	5	0	0	0
R9	4	3	0	9	6	8	8	11	3	4			
R10	15	7	10	0	8	10	11	0	0	0			
R11	15	11	17	11	6	0	13	8	0	6	2	2	2
R12	0	4	0	14	0	5	7	10	13	3			
R13	12	17	8	10	7	2		4	0	9			

Slika 4:. Rješenje problema Mađarskom metodom (peta iteracija)

3. ZAKLJUČAK

U ovom raduje opisan je problem alokacije tj. raspoređivanja radnika na strojeve. Data je matematička formulacija i kratak opis problema, kao i egzaktna metoda za rješavanje konkretnog problema koji je riješen pomoću softwer WinQSB. Ograničenja i kriteriji optimalnosti tj. funkcija cilja, mijenjaju se u zavisnosti od konkretne problematike i moraju se identifikovati za svaki zadatak posebno. Posljednih godina javlja se veliko interesovanje za ove probleme, a glavni razlog su velike mogućnosti praktične primjene u raznim oblastima.. Pod najpovoljnijim se podrazumijeva onaj raspored čijom se realizacijom postiže maksimum ili minimum funkcije cilja zavisno od zadanog problema. Zbog toga je raspoređivanje radnika veoma važan faktor za planiranje i uspješnu realizaciju postavljenih zadataka.

4. LITERATURA

[1] Fatka Kulenović: *Metode matematičkog programiranja za probleme lokacije i alokacija*, Doktorska disertacija, PMF, Sarajevo, 2014

[2] A. J ̈uttner: *On the efficiency of Egerv ́ary's perfect matching algorithm*, Technical Report, Egerv ́ary Research Group, No. 2004-13

[3] Lovrić Lj.: *Metode i modeli za donošenje optimalnih poslovnih odluka*, Rijeka, 2008

[4] http://winqsb.en.uptodown.com/